



Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 3 Abgabe 6.05.02

10. Welche der folgenden Mengen sind offen, abgeschlossen bzw kompakt?

$$\{(x, x^{-1}) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\{x \in \mathbb{Q}^2 \mid |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$K_1(0) \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\overline{K_1(0)} \subset l^2,$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für } 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

11. Es seien (X, d) und (Y, δ) metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig. Man zeige:

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

ist abgeschlossen. Gilt die Umkehrung? Hinweis: Man betrachte zunächst $X = Y = \mathbb{R}$.

12. Sind die folgenden Funktionen stetig?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) := \begin{cases} \frac{|x|xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y, z) := e^{h_0(x, y)}$$

wobei $h_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

13. Ist die Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) := \text{Arg}(z)$ auf das Argument stetig?

14. Es sei $(F, \|\cdot\|)$ ein normierter Banachraum. Man zeige: $f : F \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|$ ist stetig.