UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 4

Abgabe 13.05.02

15. Die Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt. Es sei $\mathcal{V}$ die Menge die offenen Kugeln mit Radius $1/2$ und Mittelpunkt in $\mathbb{S}^{n-1}$. Man gebe die Mittelpunkte einer endlichen Teilüberdeckung an. Wie viele Kugeln benötigt man, wenn der Radius 1 ist?

16. Es sei I das Intervall $[0,1]$, $M = I \cap \mathbb{Q}$ und $\mathcal{V}$ die offenen Intervalle der Form

$$\mathcal{V} = \Big\{ \big(\frac{p}{q} - \frac{1}{2(q+1)2^{q+1}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2(q+1)2^{q+1}}\big) : p, q \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Wir definieren

$$W = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U.$$

Man zeige: $W \cap I$ ist offen und dicht in I, $\mathcal{V}$ überdeckt M aber nicht I. Hinweis: I ist kompakt. Man betrachte die Summe der Längen der Intervalle.

17. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt koerziv, falls für alle $C_1 > 0$ eine Konstante C_2 existiert mit

$$f(x) \geq C_2 \quad \text{für } |x| \geq C_2.$$

Man zeige: Jede stetige und koerzive Funktion auf $\mathbb{R}^n$ nimmt ihr Minimum an.

18. Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nehmen ihr Minimum an?

$$f(x) = \sin(|x|) + |x|^2,$$

$$f(x) = |x|^3,$$

$$f(x) = x_1^3 + |x|^4,$$

$$f(x) = x_1^3 + |x|^2.$$

19. Sind die folgenden Funktionen stetig?

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{2}}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2^2}{|x|^4} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist

$$h : C_b([0,1]) \to \mathbb{R}, \quad h(f) := f(1/2)$$

bezüglich der Supremumsnorm stetig? Ist h bezüglich $\|.\|_{L^1}$ stetig?