Aufgabe 15

Da die $S^n = \{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ |x| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2} = 1 \}$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist die S^n kompakt (Charakterisierung der Kompaktheit im $\mathbb{R}^{n+1}$). Damit folgt, daß die beiden Überdeckungen

$$\bigcup_{x \in S^n} B(x, \frac{1}{2}) \supset S^n \quad \text{und} \quad \bigcup_{x \in S^n} B(x, 1) \supset S^n$$

der S^n endliche Teilüberdeckungen besitzen, d.h. die Aufgabe hat (nach der Theorie aus der Vorlesung) eine Lösung.
Ziel ist es nun jeweils ein konkretes Beispiel einer endlichen Teilüberdeckung für die obigen Überdeckungen anzugeben.
Es sei $D^* := \{ a = (a_1, \ldots a_{n+1}) \ : \ \forall \, i \in \{1, \ldots, n+1\} \ |a_i| = \frac{\sqrt{h_i}}{\sqrt{4(n+1)}}$ mit $h_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad$ und $h_1 + h_2 + \ldots + h_{n+1} = 4(n+1) \ \}$
Wegen $h_1 + h_2 + \ldots + h_{n+1} = 4(n+1)$ gilt $D^* \subset S^n$. Jedes h_i kann Werte aus $\{0, \ldots, 4(n+1)\}$ annehmen. Durch das Vorzeichen bedingt hat dann jedes a_i insgesamt $4(n+1) + 1 + 4(n+1) = 8n+9$ Möglichkeiten. Somit ist die Anzahl der Elemente aus D^* kleiner als $(8n+9)^{n+1}$ (Die Bedingung ${a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_{n+1}}^2 = 1$ wurde zur Berechnung der Anzahl der Elemente nicht berücksichtigt !).

Behauptung: Es gilt:

$$S^n \subset \bigcup_{a \in D^*} B(a, \frac{1}{2})$$

Zwischenbehauptung: $\forall x \in S^n \ \exists a \in D^* :$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n+1\} \ : \ |x_i - a_i| < \frac{1}{\sqrt{4(n+1)}}$$

Aus der Zwischenbehauptung folgt unmittelbar die Behauptung :
Beweis der Behauptung mittels der Zwischenbehauptung: Es sei $x \in S^n$ beliebig. Dann gibt es nach der Zwischenbehauptug $a \in D^*$ mit der Eigenschaft $\forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$: $|x_i - a_i| < \frac{1}{\sqrt{4(n+1)}}$.
Dann folgt:

$$|x - a| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |x_i - a_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\frac{1}{\sqrt{4(n+1)}})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{4(n+1)}} = \sqrt{(n+1) \frac{1}{4(n+1)}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

d.h. $x \in B^*(a, \frac{1}{2})$. Damit folgt dann die Behauptung.
Beweis der Zwischenbehauptung: Es sei $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) = S^n$ beliebig.

Wegen ${x_1}^2 + x^2 + \ldots + {x_{n+1}}^2 = 1$ gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ dann $-1 \leq x_i \leq 1$. Damit gibt es zu jedem i genau ein $k_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 4(n+1)$ mit

$$u_i := \frac{\sqrt{k_i}}{\sqrt{4(n+1)}} \leq |x_i| < \frac{\sqrt{k_i+1}}{\sqrt{4(n+1)}} =: o_i \qquad .$$

(o=oben, u=unten). Weiter folgt:

$$o_i - u_i = \frac{\sqrt{k_i+1}}{\sqrt{4(n+1)}} - \frac{\sqrt{k_i}}{\sqrt{4(n+1)}} = \frac{\sqrt{k_i+1} - \sqrt{k_i}}{\sqrt{4(n+1)}} = \frac{k_i + 1 - k_i}{(\sqrt{k_i+1} + \sqrt{k_i})\sqrt{4(n+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{4(n+1)}}$$

Wegen $u_i \leq |x_i| < o_i$ folgt dann weiter

$$||x_i| - u_i| < \frac{1}{\sqrt{4(n+1)}} \quad \text{ und } |o_i - |x_i|| \leq \frac{1}{\sqrt{4(n+1)}}.$$

Falls $u_i < |x_i|$ gilt, so folgt auch $|o_i - |x_i|| < \frac{1}{\sqrt{4(n+1)}}$.
Aus $u_i \leq |x_i| < o_i$ folgt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} {u_i}^2 \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 < \sum_{i=1}^{n+1} {o_i}^2$$

Einschub: Durch die Wahl von $|a_i| = u_i$ für $i = 1, \ldots, n+1$ würde u.U. $|a|^2 = {a_1}^2 + \ldots {a_{n+1}}^2 < 1$ gelten, durch die Wahl von $|a_i| = o_i$ für $i = 1, \ldots, n+1$ würde $|a|^2 = {a_1}^2 + \ldots {a_{n+1}}^2 > 1$ gelten. Durch eine geeignete Wahl von $|a_i| = u_i$ für einige i's und $|a_i| = o_i$ für die restlichen i's läßt sich $|a|^2 = {a_1}^2 + \ldots {a_{n+1}}^2 = 1$ erreichen. Im folgenden wird dies ausgeführt. Es sei nun

$$A := \{i \ : \ u_i = |x_i|\} \text{ und } B := \{i \ : \ u_i < |x_i|\}$$

Damit ergibt sich

$$(4(n+1)) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} {u_i}^2 \leq (4(n+1)) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 4(n+1) < (4(n+1)) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} {o_i}^2$$

Nach Definition der u_i's und der o_i's gilt

$$4(n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} {u_i}^2 \in \mathbb{N} \quad \text{ und } \quad 4(n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} {o_i}^2 \in \mathbb{N}$$

Wegen

$${o_i}^2 - {u_i}^2 = \frac{k_i+1}{4(n+1)} - \frac{k_i}{4(n+1)} = \frac{1}{4(n+1)}$$

folgt

$$(4(n+1)) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} {o_i}^2 - (4(n+1)) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} {u_i}^2 = n+1$$

Also gilt auch

$$4(n+1) - 4(n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} {u_i}^2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ und } 0 \leq 4(n+1) - 4(n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} {u_i}^2 < n+1$$

Es sei nun $M := 4(n+1) - 4(n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n+1} {u_i}^2$. Wegen

$$0 \geq {x_i}^2 \cdot 4(n+1) - {u_i}^2 \cdot 4(n+1) < {o_i}^2 \cdot 4(n+1) - {u_i}^2 \cdot 4(n+1) = 1$$

gilt in mindestens M Koordinaten $u_i < |x_i|$, d.h. die Menge B besteht aus mindestens M Elementen.
Man zerlegt nun die Menge B in zwei disjunkte Mengen B_1 und B_2, wobei B_1 genau aus M Elementen besteht.
Es läßt sich das gesuchte $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ nun wie folgt definieren: Für $i \in A \cup B_2$

$$a_i := \begin{cases} \frac{\sqrt{k_i}}{\sqrt{4(n+1)}} & \text{für } x_i \geq 0 \\ -\frac{\sqrt{k_i}}{\sqrt{4(n+1)}} & \text{für } x_i \leq 0 \end{cases}$$

Für $i \in B_1$

$$a_i := \begin{cases} \frac{\sqrt{k_i+1}}{\sqrt{4(n+1)}} & \text{für } x_i \geq 0 \\ -\frac{\sqrt{k_i+1}}{\sqrt{4(n+1)}} & \text{für } x_i \leq 0 \end{cases}$$

Damit folgt dann

$$|a|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} {a_i}^2 = \sum_{i=1}^{n+1} {u_i}^2 + \frac{M}{4(n+1)} = 1,$$

d.h. $a \in S^n$
Hinweis: Im Endeffekt wurde gezeigt:

$$\bigcup_{a \in D^*} B^{\|\ \|_\infty}(a, \frac{1}{2\sqrt{n+1}}) \supset S^n = \{(x_1, \dots x_{n+1}) \ : \ {x_1}^2 + \dots {x_{n+1}}^2 = 1 \ \}$$

mit $B^{\|\ \|_\infty}(a, \frac{1}{2\sqrt{n+1}}) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x-a\|_\infty := \max_{i=1}^{n+1} |x_i - a_i| < \frac{1}{\sqrt{4(n+1)}} \ \}$

Nun zu der Überdeckung mit Radius 1: Wegen $B(a, \frac{1}{2}) \subseteq B(a, 1)$ läßt sich auch die Menge

D^* nehmen. Möchte man eine etwas kleinere Menge, so kann man analog zu oben beweisen, daß die Menge $D := \{a = (a_1, \ldots a_{n+1}) \ : \ \forall i \in \{1, \ldots, n+1\} \ |a_i| = \frac{\sqrt{h_i}}{\sqrt{(n+1)}}$ mit $h_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad$ und $h_1 + h_2 + \ldots + h_{n+1} = (n+1) \ \}$
ausreicht.

Aufgabe 16

Es sei $I := [0,1]$, $M = I \cap \mathbb{Q}$ und

$$\mathcal{V} := \{(\frac{p}{q} - \frac{1}{2(q+1)2^{q+1}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2(q+1)2^{q+1}}) : q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}_0\}$$

$$W = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U$$

1. $W \cap I$ ist offen als Vereinigung von offenen Intervallen.
2. $W \cap I$ ist dicht in I: Sei $z \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, dann existieren $q \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}_0$

$$z = \frac{p}{q} \in (\frac{p}{q} - \frac{1}{2(q+1)2^{q+1}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2(q+1)2^{q+1}})$$

$\Rightarrow \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset W$
Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, folgt: W ist dicht in $[0,1]$.
3. $\mathcal{V}$ überdeckt $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist klar nach 2, da $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset W$
4. $\mathcal{V}$ überdeckt nicht I:
Hinweis: Betrachte die Längen der Intervalle in $\mathcal{V}$. Wenn die Summe der Längen der Einzelintervalle aus $\mathcal{V}$ kleiner ist als 1, dann kann $W = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U$ nicht I überdecken. (Die Einzelintervalle können sich überlappen, d. h. die Summe der Einzelintervalle für feste p und q ist größer als die eigentliche Länge von $\mathcal{V}$):
Annahme: $\mathcal{V}$ überdeckt I. Da I kompakt ist, muß es aus $\mathcal{V}$ eine endliche Teilüberdeckung von I geben. Dies wollen wir im folgenden zum Widerspruch führen:

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{2(q+1)2^{q+1}} - \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2(q+1)2^{q+1}}\right) = \frac{1}{(q+1)2^{q+1}}$$

Für festes $q \in \mathbb{N}$ gilt: $z = \frac{p}{q} \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq p \leq q$ (Für festes $q \in \mathbb{N}$ gibt es also $q+1$ Zahlen der Form $\frac{p}{q}$):

$$\sum_{p=0}^{q} \frac{1}{(q+1)2^{q+1}} = \frac{q+1}{q+1} \quad \frac{1}{2^{q+1}}$$

Sei nun $q \in \mathbb{N}$ beliebig, dann ist die Summe der Einzelintervalle von $\mathcal{V}$ gleich:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^{q+1}} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^q} = \frac{1}{2} < 1$$

Jede endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{V}$ hat auch höchstens die Länge $\frac{1}{2}$. Da I die Länge 1 hat, gibt es keine endliche Teilüberdeckung von $\mathcal{V}$, die I überdeckt. Dies steht aber im Widerspruch zur Kompaktheit von I. Also ist die Annahme, $\mathcal{V}$ überdeckt I, falsch.

Aufgabe 17

Behauptung: $$\big(f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und } \forall C_1 > 0\ \exists\, C_2 : |x| \geq C_2 \Rightarrow f(x) \geq C_1\big)$$ $$\Rightarrow f \text{ nimmt auf } \mathbb{R}^n \text{ ihr Minimum an.}$$

Beweisidee: Teile $\mathbb{R}^n$ in zwei Mengen auf durch geeignete Wahl von C_2:
1) $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq C_2\}$: In dieser Menge nimmt f wegen der Koerzivität kein Minimum an und in
2) $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq C_2\}$ nimmt f ihr Minimum an wegen der Kompaktheit dieser Menge.

Beweis:
Definiere $C_1 := \max\{f(0) + 1, 1\}$
Dann existiert nach Voraussetzung C_2, so daß für $|x| \geq C_2$ gilt: $f(x) \geq C_1 > f(0)$.
D.h. die $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \geq C_2$ tragen nichts zur Minimumbildung bei. Betrachte die übrigen x:
$K_{C_2}(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq C_2\}$ ist ein kompakte Menge
$\Rightarrow$ Die stetige Funktion f nimmt auf $K_{C_2}(0)$ ihr Minimum an.

Aufgabe 18

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ nehmen ihr Minimum an?

1) *Behauptung*:
$$f(x) = \sin(|x|) + |x|^2 \quad \text{nimmt ihr Minimum an.}$$
Beweis: Sei $C_1 > 0$ beliebig:
$$f(x) \geq C_1 \Leftrightarrow \sin|x| + |x|^2 \geq C_1 \Leftarrow -1 + |x|^2 \geq C_1 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{C_1 + 1} =: C_2$$

2) *Behauptung*:
$$f(x) = |x|^3 \quad \text{nimmt ihr Minimum an.}$$
Beweis: Sei $C_1 > 0$ beliebig:
$$|x|^3 \geq C_1 \Leftrightarrow |x| \geq (C_1)^{\frac{1}{3}} =: C_2$$

3) *Behauptung*:
$$f(x) = x_1^3 + |x|^4 \quad \text{nimmt ihr Minimum an.}$$
Beweis: Sei $C_1 > 0$ beliebig:
$$x_1^3 + |x|^4 = x_1^3 + |x|^3 + |x|^4 - |x|^3 = \underbrace{x_1^3 + |x|^3}_{\geq 0} + \underbrace{|x|^3(|x| - 1)}_{\geq C_1} \geq C_1$$

für $|x| \geq \max\{2, (C_1)^{\frac{1}{3}}\}$
4) *Behauptung*:

$$f(x) = x_1^3 + |x|^2 \quad \text{nimmt ihr Minimum nicht an.}$$

Beweis:

$$f(-n, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}) = (-n)^3 + (-n)^2 = -n^3 + n^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

und

$$|(-n, 0, \cdots, 0))| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Aufgabe 19

Sind die folgenden Funktionen stetig?

1) $\quad f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}}$
Behauptung: f ist stetig.
Beweis: $f^* : \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Die Einschränkung der stetigen Funktion f^* auf $\mathbb{Q}$ ist dann auch stetig, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Bemerkung: f ist nicht stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}$, da:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{1}{x-\sqrt{2}} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{1}{x-\sqrt{2}} = \infty$$

2) $\quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2^2}{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^4} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Behauptung: g ist nicht stetig.
Beweis:

$$g(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\left(\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}\right)^4} = \frac{\frac{1}{n^4}}{(\frac{2}{n^2})^2} = \frac{1}{4} \neq 0 = f(0)$$

3) $\quad h : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(f) := f\left(\frac{1}{2}\right)$
Behauptung: h ist stetig bzgl. der Supremumsnorm.
Beweis:

$$||h|| = \sup_{||f||_{\text{sup}}\leq 1} h(f) = \sup_{||f||_{\text{sup}}\leq 1} |f(\frac{1}{2})| \leq 1$$

Behauptung: h ist nicht stetig bzgl. der L_1-Norm.
Beweis: Betrachte die Funktionenfolge von gleichschenkligen Dreiecken mit Höhe n im Punkt $1/2$ und Breite $2/n$:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{n} \\ n - n^2|x - \frac{1}{2}| & \text{für } |x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Dann gilt: $||f||_{L_1} = \frac{1}{n} \cdot n = 1$ und

$$||h|| = \sup_{||f||_{L_1} \leq 1} h(f) = \sup_{||f||_{L_1} \leq 1} |f(\frac{1}{2})| \geq f_n(\frac{1}{2}) = n \longrightarrow \infty$$