UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 5

Abgabe 21.05.02

20. Es seien E, F und G normierte Vektorräume. Man zeige: Die Komposition

$$K : L(E,F) \times L(F,G) \to L(E,G), (T,S) \to S \circ T$$

ist stetig. Ist diese Abbildung linear?

21. Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, linear, $n, m \in \mathbb{N}$, A die zugehörige Matrix. Man zeige:

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|T\| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

22. Man bestimme die Zusammenhangskomponenten der folgenden metrischen Räume. Sind die Räume wegzusammenhängend? Sind sie sternförmig? Sind sie konvex? Welche sind offene bzw. abgeschlossene Teilmengen der angegebenen Räume?

$$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$$

$$\partial K_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x = 0 \text{ und } |y| \leq 1) \text{ oder } (|x| \leq 1 \text{ und } x = 0) \Big\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x = 0 \text{ und } |y| \leq 1) \text{ oder } (0 < |x| \leq 1 \text{ und } y = \sin(1/x)) \Big\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$$

Hinweise: Die dritte Menge ist ein Teil des Achsenkreuzes, die vierte die Vereinigung des Graphen von $sin(1/x)$ für $x \neq 0$ mit einer vertikalen Strecke der Länge 2. Man skizziere die Mengen.

23. Zusatzaufgabe: Welche Paare der folgenden Räume sind homöomorph und welche nicht?

$$[-1,1], \quad \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{S}^1, \quad [-2,2], \quad (-1,1)$$

24. Man finde eine offene sternförmige aber nicht konvexe Menge, sowie eine wegzusammenhängende aber nicht sternförmige Menge.