# Musterlösung zu Blatt 5

## 1 Aufgabe 20

Es seien E, F und G normierte Vektorräume. Man zeige: Die Komposition

$$K : L(E,F) \times L(F,G) \to L(E,G), (T,S) \mapsto S \circ T$$

ist stetig.
Seien $T_1, T_2 \in L(E,F), S_1, S_2 \in L(F,G)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta_1 := \frac{\varepsilon}{2\|S_1\|+1}, \delta_2 := \frac{\varepsilon}{2\|T_2\|+1}$. Mit $\|S_1 - S_2\| < \delta_2$ und $\|T_1 - T_2\| < \delta_1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|S_1 \circ T_1 - S_2 \circ T_2\| &= \|S_1 \circ T_1 - S_1 \circ T_2 + S_1 \circ T_2 - S_2 \circ T_2\| \\
&= \|S_1 \circ (T_1 - T_2) + (S_1 - S_2) \circ T_2\| \\
&\leq \|S_1 \circ (T_1 - T_2)\| + \|(S_1 - S_2) \circ T_2\| \\
&\leq \|S_1\|\|(T_1 - T_2)\| + \|(S_1 - S_2)\|\|T_2\| \\
&\leq \|S_1\|\delta_1 + \delta\|T_2\| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Also ist $K$ stetig.
Die Abbildung $K$ ist nicht linear, denn:
Sei $e \in E$ beliebig.

$$\begin{aligned}
K(\alpha(T_1, S_1) + (T_2, S_2))(e) &= K(\alpha T_1 + T_2, \alpha S_1 + S_2)(e) \\
&= (\alpha S_1 + S_2) \circ (\alpha T_1 + T_2)(e) \\
&= (\alpha S_1 + S_2)(\alpha T_1(e) + T_2(e)) \\
&= \alpha S_1(\alpha T_1(e) + T_2(e)) + S_2(\alpha T_1(e) + T_2(e)) \\
&= \alpha^2 S_1 \circ T_1(e) + \alpha S_1 \circ T_2(e) + \alpha S_2 \circ T_1(e) + S_2 \circ T_2(e)
\end{aligned}$$

Dies ist i.a. $\neq (\alpha S_1 \circ T_1 + S_2 \circ T_2)(e)$, also ist $K$ nicht linear.

## 2 Aufgabe 21

Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, linear, $n, m \in \mathbb{N}, A$ die zugehörige Matrix. Man zeige:

1. $\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|T\|$
   Es bezeiche $|\cdot|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Es gilt:
   $\|T\| = \sup_{|x|=1} |T(x)|$ Sei $k$ der Index der Spalte, die das Maximum der Matrixeinträge enthält.
   Setze $y := (0, ..., 0, 1, 0, ...0), |y| = 1$.
   $\Rightarrow \sup_{|x|=1} |T(x)| = \sup_{|x|=1} |Ax| \geq |Ay| = \left(\sum_{i=1}^m |a_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \max_i |a_{ik}| = \max_{i,j} |a_{ij}|$

2. $\|T\| \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|T\| = \sup_{|x|=1} |T(x)| &= \sup_{|x|\leq 1} |Ax| \\
&= \sup_{|x|=1} \left( \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{|x|=1} \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1) \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

da $|x| = 1 \Rightarrow |x_j| \leq 1 \forall j = 1, ..., n$ und die Wurzelfunktion monoton ist.Abschäzung (1) erfolgt mit Cauchy-Schwarz.

## 3 Aufgabe 22

Man bestimme die Wegzusammenhangskomponenten der folgenden metrischen Räume. Sind die Räume wegzusammenhängend? Sternförmig? Konvex? Welche sind offenen bzw. abgeschlossene Teilmengen der angegebenen Räume?

Beachte, dass folgende Implikationen gelten:
konvex $\Rightarrow$ sternförmig $\Rightarrow$ wegzusammenhängend

1. $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^n$ ist konvex:
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0,1]$ beliebig. $\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend, einzige Wegzusammenhangskomponente ist $\mathbb{R}^n$.

2. $\partial K_1(0) \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$

   - $n = 1$:
   $K_1(0) = (-1,1), \partial K_1(0) = \{-1, 1\}$. Dies hat zwei Wegzusammenhangskomponenten, nämlich $\{-1\}$ und $\{1\}$.
   - $n \geq 2$:
   $\partial K_1(0) = \mathbb{S}^{n-1}$ ist wegzusammenhängend, denn:
   Seien $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}, x \neq y$.

     (a) $\forall t \in [0,1] : x + t(y-x) \neq 0$. Dann wird durch $\gamma(t) := \frac{x+t(y-x)}{|x+t(y-x)|}$ ein Weg auf $\mathbb{S}^{n-1}$ von $x$ nach $y$ definiert.

     (b) Es gibt ein $t_0 \in [0,1]$ mit $x + t_0(y-x) = 0$. Sei $z$ ein weiterer Punkt auf $\mathbb{S}^{n-1}$, der nicht auf der von $x, y$ und dem Ursprung aufgespannten Ebene liegt. Dann wird durch

     $$\gamma(t) := \begin{cases} \frac{x+2t(z-x)}{|x+2t(z-x)|} & , \text{ falls } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{z+(2t-1)(y-z)}{|z+(2t-1)(y-z)|} & , \text{ falls } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad \text{ein Weg auf } \mathbb{S}^{n-1}$$

von $x$ nach $y$ definiert.
($\gamma$ ist stetig!)

Also ist $\mathbb{S}^{n-1}$ wegzusammenhängend.
$\mathbb{S}^{n-1}$ ist bzgl. keines Punktes sternförmig, denn:
Sei $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ beliebig, aber fest. Für jedes $y \in \mathbb{S}^{n-1}, y \neq x$ ist $\left|\frac{1}{2}(x+y)\right| < 1$. Gleichheit in der Dreiecksungleichung kann nur auftreten, wenn $x$, $y$ und 0 kollinear sind. Dann ist aber $y = -x$, somit $\frac{1}{2}(x+y) = 0$.

$\partial K_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen und nicht offen in $\mathbb{R}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \wedge |y| \leq 1) \vee (|x| \leq 1 \wedge y = 0)\} \subset \mathbb{R}^2$
   $A$ ist sternförmig bzgl. $(0,0)$: Seien $(x,y) \in A$ beliebig. Zu zeigen: $\forall t \in [0,1] : t(x,y) \in A$. Es können zwei Fälle auftreten:

   (a) $(x = 0 \wedge |y| \leq 1) \Rightarrow (tx = 0 \wedge |ty| = |t||y| \leq |y| \leq 1) \Rightarrow t(x,y) \in A$

   (b) $(y = 0 \wedge |x| \leq 1) \Rightarrow (ty = 0 \wedge |tx| = |t||x| \leq |x| \leq 1) \Rightarrow t(x,y) \in A$

   $A$ ist nicht konvex, denn:
   $(0,1),(1,0) \in A$, aber $\frac{1}{2}[(0,1)+(1,0)] \notin A$.
   Als Vereinigung zweier abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ ist $A$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$.

4. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0 \wedge |y| \leq 1) \vee (0 < |x| \leq 1 \wedge y = sin(1/x))\} \subset \mathbb{R}^2$
   $A$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend:
   Die Abbildung $f : (0,1] \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, sin(1/x))$ ist stetig.
   Daher ist $X_1 := \{(x,y) \mid x > 0 \wedge y = sin(1/x)\}$ wegzusammenhängend als Bild einer wegzusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung.
   Analoge Argumentation für $X_2 := \{(x,y) \mid x < 0 \wedge y = sin(1/x)\}$.
   $X_3 := \{(x,y) \mid x = 0 \wedge |y| \leq 1\}$ ist konvex, also wegzusammenhängend.

   Um zu zeigen, dass $A$ nicht wegzusammenhängend ist, wird gezeigt, dass es keinen Weg $\gamma : [0,1] \to A$ mit $\gamma(0) = (1/\pi, 0)$ und $\gamma(1) = (0,0)$ gibt.
   Angenommen, es gibt einen solchen Weg $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Es ist $\gamma_1(0) = 1/\pi, \gamma_1(1) = 0$. Setze $c := min\{t \in [0,1] \mid \gamma_1(t) = 0\}$.
   Auf $[0,c]$ nimmt $\gamma_1(t)$ jeden Wert zwischen 0 und $1/\pi$ an.
   Behauptung: $\gamma$ ist nicht stetig in $c$.
   Wenn $\gamma$ in $c$ stetig ist, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $t \in [c-\delta, c]$ gilt: $|\gamma_1(t) - \gamma_1(c)| < \frac{1}{2} \wedge |\gamma_2(t) - \gamma_2(c)| < \frac{1}{2}$.
   Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n > N : \gamma_1(c-\delta) > \frac{1}{n\pi}$.
   Da $\gamma_1$ stetig ist, nimmt $\gamma_1$ auf $[c-\delta, c]$ jeden Wert zwischen $\gamma_1(c-\delta)$ und 0 an, insbesondere gibt es $t_n, \tilde{t_n} \in [c-\delta, c]$ mit $\gamma_1(t_n) = \frac{1}{n\pi}$ undn $\gamma_1(\tilde{t_n}) = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$. Es ist $\gamma_2(t_n) = 0$ und $\gamma_2(\tilde{t_n}) \in \{-1, 1\}$.
   Daraus folgt, dass es in jeder Umgebung von $c$ Elemente gibt, die nicht in der $\varepsilon$-Umgebung von $(\gamma_1(c), \gamma_2(c)), \varepsilon = \frac{1}{2}$ liegen.
   Also gibt es keinen stetigen Weg von $(1/\pi, 0)$ nach $(0,0)$ in $A$; $A$ ist nicht wegzusammenhängend. Insbesondere ist $X_1 \cup X_3$ nicht wegzusammenhängend.
   Analoge Argumentation, um zu zeigen, dass $X_2 \cup X_3$ nicht wegzusammenhängend ist.

Die Wegzusammenhangskomponenten von $A$ sind gerade $X_1, X_2, X_3$.

$A$ ist abgeschlossen als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen $\overline{X_1}, \overline{X_2}$ und nicht offen in $\mathbb{R}^2$.

5. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$
Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ sind die Punkte von $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ ist weder abgeschlossen noch offen in $\mathbb{C}$.

# 4 Zusatzaufgabe 23

Welche Paare der folgenden Räume sind homöomorph und welche nicht?

1. $[-1,1]$
2. $\mathbb{R}^2$
3. $\mathbb{S}^1$
4. $[-2,2]$
5. $(-1,1)$

- $[-1,1] \approx [-2,2]$: Durch $f : [-1,1] \to [-2,2]$, $x \mapsto 2x$ wird ein Homöomorphismus definiert.
Wegen $[-1,1] \approx [-2,2]$ und da Homöomorphie eine Äquivalenzrelation ist, muss $[-2,2]$ im folgenden nicht weiter betrachtet werden.
- $[-1,1] \not\approx \mathbb{S}^1$: Angenommen, $f : [-1,1] \to \mathbb{S}^1$ ist ein Homöomorphismus.
$\Rightarrow f : (-1,1) \to \mathbb{S}^1 \setminus \{p,q\}$ , $f(1) = p \neq q = f(-1)$ ist ein Homöomorphismus. Es ist aber $(-1,1)$ zusammenhängend und $\mathbb{S}^1 \setminus \{p,q\}$, $p \neq q$ nicht zusammenhängend, also ein Widerspruch.
- $[-1,1] \not\approx \mathbb{R}^2$: $[-1,1]$ ist kompakt, $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt. Also sind die Räume nicht homöomorph.
- $[-1,1] \not\approx (-1,1)$: $[-1,1]$ ist kompakt, $(-1,1)$ ist nicht kompakt. Also sind die Räume nicht homöomorph.
- $\mathbb{R}^2 \not\approx \mathbb{S}^1$: $\mathbb{S}^1$ ist kompakt, $\mathbb{R}^2$ ist nicht kompakt.
- $(-1,1) \not\approx \mathbb{S}^1$: $\mathbb{S}^1$ ist kompakt, $(-1,1)$ ist nicht kompakt.
- $(-1,1) \not\approx \mathbb{R}^2$: Angenommen, $f : (-1,1) \to \mathbb{S}^1$ ist ein Homöomorphismus.
$\Rightarrow f : (-1,1) \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{q\}$, wobei $p$ beliebig und $q = f(p)$, ist ein Homöomorphismus. $(-1,1) \setminus \{p\}$ hat zwei Zusammenhangskomponenten, wohingegen $\mathbb{R}^2 \setminus \{q\}$ für jedes q (weg-)zusammenhängend, also ein Widerspruch.

## 5 Aufgabe 24

1. Man finde eine offene sternförmige, aber nicht konvexe Menge:
   $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x| < y+1)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x| > y-1)\}$
   $A$ ist offen als Vereinigung zweier offener Mengen.
   $A$ ist sternförmig bzgl. $(0,0)$, denn:
   $(x,y) \in A, t \in [0,1] \Rightarrow t(x,y) \in A$
   $A$ ist nicht konvex, denn:
   $(2,-1) \in A$ und $(2,1) \in A$, aber $\frac{1}{2}[(2,-1)+(2,1)] = (2,0) \notin A$

2. Man finde eine wegzusammenhängende, aber nicht sternförmige Menge:
   Wie in Aufgabe 22 gesehen, ist $\mathbb{S}^1$ wegzusammenhängend, aber nicht sternförmig.