UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 7

Abgabe 03.06.02

29. **Polarkoordinaten.** Man zeige, daß der Satz über inverse Funktionen auf die Abbildung

$$p : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt (r_0, θ_0) anwendbar ist. Man berechne die Ableitung der Umkehrfunktion von $p|_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi]}$ in einem Punkt aus $\mathbb{R}^2 \backslash \{x_1 e_1 : x_1 \leq 0\}$.

30. **Harmonische Funktionen.** Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Dann ist der Laplaceoperator angewandt auf f durch

$$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_i f(x)$$

definiert. Eine Funktion $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ heißt harmonisch, falls $\Delta f(x) = 0$ für alle $x \in D$. Man zeige: Die Funktionen

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 \quad \text{und} \quad g(x) = x_1 x_2 x_3$$

sind harmonisch, wobei $n \geq 2$ im ersten Fall und $n \geq 3$ im zweiten Fall.
Man zeige: Gilt $l : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $l(x) = h(|x|)$ wobei $h \in C^2((0,\infty))$, so ist l genau dann harmonisch, wenn

$$h^{(2)}(r) + \frac{n-1}{r} h'(r) = 0$$

für $r > 0$.

31. **Wellengleichung.** Es seien $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ und

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),\ f(x) := g(x_1 - x_2) + h(x_1 + x_2)$$

Man zeige

$$\partial_1 \partial_1 f(x) - \partial_2 \partial_2 f(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

32. **Elementarsymmetrische Funktionen.** Es sei $D = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 \neq x_2, x_2 \neq x_3, x_1 \neq x_3\}$. Man zeige, daß die folgende Abbildung $f : D \to f(D)$ ein Diffeomorphismus ist:

$$f : D \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Hinweise: Man berechne zuächst die Determinante der Funktionalmatrix in jedem Punkt. Die Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kann durch algebraische Manipulationen gefunden werden. Es ist sinnvoll, zunächst den zweidimensionalen Fall bzw. den Fall $x_3 = 0$ zu betrachten.