# Musterlösung Übungsblatt 7

## Aufgabe 29:

1. Zeige, daß der Satz über inverse Funktionen auf $p$ in jedem Punkt $\binom{r_0}{\theta_0}$ anwendbar ist:
   Es gilt: $(0,\infty)\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$ offen ( zunächst in der Max-Norm, also auch in jeder Norm).

   $p$ ist eine $C^\infty$-Funktion, da die einzelnen Abbildungen $r\mapsto r\cos\theta$, $r\mapsto r\sin\theta$, $\theta\mapsto r\cos\theta$, $\theta\mapsto r\sin\theta$ $C^\infty$, und alle partiellen Ableitungen von $p_1$ und $p_2$ von dieser Art sind.

   Sei $\binom{r_0}{\theta_0}\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$.

   $$p'\begin{pmatrix}r_0\\ \theta_0\end{pmatrix}=Dp\begin{pmatrix}r_0\\ \theta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta_0 & -r_0\sin\theta_0\\ \sin\theta_0 & r_0\cos\theta_0\end{pmatrix}$$

   ist — nach LINA — genau dann invertierbar, wenn die Determinante ungleich 0 ist. Also

   $$\det\left(Dp\begin{pmatrix}r_0\\ \theta_0\end{pmatrix}\right)=r_0\cos^2\theta_0+r_0\sin^2\theta_0=r_0\neq 0$$

   $\Rightarrow$ Behauptung.

2. Berechne die Ableitung der Umkehrfunktion von $p|_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi)}$ in einem Punkt aus $\mathbb{R}^2\backslash\{x_1e_1|x_1\leq 0\}$:
   **Vorüberlegung:** $p|_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi)}:(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2\backslash\{x_1e_1|x_1\leq 0\}$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $g$. Sei $y\in\mathbb{R}^2\backslash\{x_1e_1|x_1\leq 0\}$. Dann existiert nach 1. ein offenes $U\subset(0,\infty)\times(-\pi,\pi)$, so daß $y\in p(U)$ und $p|_U$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $(p|_U)^{-1}$ die entsprechende Umkehrabbildung.

   $$\Rightarrow\quad (p|_U)^{-1}=g|_{p(U)}\circ p|_U\circ(p|_U)^{-1}=g|_{p(U)},$$

   also ist $g|_{p(U)}\in C^\infty(p(U),U)$, woraus folgt, daß $g$ in jedem Punkt aus $\mathbb{R}^2\setminus\{x_1e_1|x_1\leq 0\}$ beliebig oft differenzierbar ist. Also existiert tatsächlich $Dg(y)$.

   Nach Aufgabe 27 gilt: $Dg(y)=(Dp(g(y)))^{-1}\quad\forall\, y\in\mathbb{R}^2\backslash\{x_1e_1|x_1\leq 0\}$.

Dies liefert:

$$\begin{aligned}
Dg(y) &= \begin{pmatrix} \cos(g_2(y)) & -g_1(y)\sin(g_2(y)) \\ \sin(g_2(y)) & g_1(y)\cos(g_2(y)) \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\det Dp(g(y))} \begin{pmatrix} g_1(y)\cos(g_2(y)) & g_1(y)\sin(g_2(y)) \\ -\sin(g_2(y)) & \cos(g_2(y)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun ist $\det\left(Dp(g(y))\right) = g_1(y)$, und es gilt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = p \circ g(y) = \begin{pmatrix} g_1(y)\cos(g_2(y)) \\ g_1(y)\sin(g_2(y)) \end{pmatrix}, \tag{$*$}$$

d.h.

$$Dg(y) = \frac{1}{g_1(y)} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -\frac{y_2}{g_1(y)} & \frac{y_1}{g_1(y)} \end{pmatrix}$$

Es reicht also, $g_1(y)$ zu berechnen. Aus $(*)$ folgt: $y_1^2 + y_2^2 = g_1^2(y)$, also $g_1(y) = |y|$. Somit erhält man

$$Dg(y) = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{|y|} & \frac{y_2}{|y|} \\ -\frac{y_2}{|y|^2} & \frac{y_1}{|y|^2} \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 30:

1. $f$, $g$ sind harmonisch:

$$\left.\begin{array}{c} \partial_1 f(x) = 2x_1 \text{ und } \partial_1\partial_1 f(x) = 2 \\ \partial_2 f(x) = -2x_2 \text{ und } \partial_2\partial_2 f(x) = -2 \\ \partial_i f(x) = 0 = \partial_i\partial_i f(x) \quad \forall\, i \geq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta f(x) = 2 - 2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{c} \partial_1 g(x) = x_2 x_3 \\ \partial_2 g(x) = x_1 x_3 \\ \partial_3 g(x) = x_1 x_2 \\ \partial_i g(x) = 0 \quad \forall\, i \geq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \partial_i\partial_i g(x) = 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \Delta g(x) = 0$$

2. Zeige, daß für $l : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$, $l(x) := h(|x|)$, mit $h \in C^\infty((0,\infty))$, gilt:
$l$ harmonisch $\Leftrightarrow h^{(2)}(r) + \frac{n-1}{r} h'(r) = 0, \forall\, r > 0$.

Definiere $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $r(x) := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Dann ist $\partial_i r(x) = \frac{x_i}{r(x)} = \frac{x_i}{|x|}$. Dies liefert

$$\partial_i l(x) = \partial h \circ r(x) = h'(r(x))\partial_i r(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ \partial_i \partial_i l(x) &= h''(r(x))(\partial_i r(x))^2 + h'(r(x)) \left( \tfrac{1}{r(x)} - \tfrac{x_i \partial_i r(x)}{(r(x))^2} \right) \\ &= h''(|x|) \tfrac{x_i^2}{|x|^2} + h'(|x|) \left( \tfrac{1}{|x|} - \tfrac{x_i^2}{|x|^3} \right) \end{aligned}$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} \Delta l(x) &= h''(|x|) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{|x|^2} + h'(|x|) \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3} \right) \\ &= h''(|x|) + h'(|x|) \frac{n-1}{|x|} \end{aligned}$$

Also gilt $\Delta l(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ h''(|x|) + h'(|x|)\frac{n-1}{|x|} = 0 \quad \forall\, x \neq 0$ .
$\Leftrightarrow \ h''(r) + h'(r)\frac{n-1}{r} = 0 \quad \forall\, r > 0.$

## Aufgabe 31:

$$\partial_1 f(x) = g'(x_1 - x_2) + h'(x_1 + x_2) \quad \Rightarrow \quad \partial_1 \partial_1 f(x) = g''(x_1 - x_2) + h''(x_1 + x_2)$$

$$\partial_2 f(x) = -g'(x_1 - x_2) + h'(x_1 + x_2) \quad \Rightarrow \quad \partial_2 \partial_2 f(x) = \partial_1 \partial_1 f(x)$$

$$\Rightarrow \partial_1 \partial_1 f(x) - \partial_2 \partial_2 f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2$$

## Aufgabe 32:

1. $f$ ist auf $D$ ein lokaler Diffeomorphismus:
   $D$ ist in $\mathbb{R}^3$ offen. Desweiteren gilt:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_3 & x_1 + x_3 & x_1 + x_2 \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \det Df(x) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 - x_2 & x_1 - x_3 \\ 0 & (x_1 - x_2)x_3 & (x_1 - x_3)x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz über inverse Abbildungen ist $f$ also in jedem Punkt von $D$ ein lokaler Diffeomorphismus, sogar ein $C^\infty$-Diffeomorphismus.

Definiere nun $\widetilde{D} := \{x \in D \,|\, x_1 < x_2 < x_3\}$ und $\widetilde{f} := f|_{\widetilde{D}}$.

2. $\widetilde{f} : \widetilde{D} \to f(\widetilde{D})$ ist bijektiv:
   Sei $y \in f(\widetilde{D})$. Ist $x \in \widetilde{D}$ ein Urbild von $y$, so gilt

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\ y_3 &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x_1y_2 = x_1^2(x_2 + x_3) + x_1x_2x_3 = x_1^2(y_1 - x_1) + y_3$$
$$\Rightarrow \quad x_1^3 - y_1x_1^2 + y_2x_1 - y_3 = 0.$$

   Ebenso erhält man

$$x_2^3 - y_1x_2^2 + y_2x_2 - y_3 = 0$$

$$x_3^3 - y_1x_3^2 + y_2x_3 - y_3 = 0$$

   Das bedeutet, $x_1$, $x_2$, $x_3$ sind Nullstellen des Polynoms $x^3 - y_1x^2 + y_2x - y_3$, also sind $x_1$, $x_2$, $x_3$ eindeutig bis auf Permutation der Indizes. Nun legt die Bedingung $x_1 < x_2 < x_3$ eine Indexreihenfolge eindeutig fest.

   Also ist $x$ in $\widetilde{D}$ eindeutig bestimmt und somit $\widetilde{f}$ injektiv. Dies liefert die Behauptung.

3. $\widetilde{f} : \widetilde{D} \to f(\widetilde{D})$ Diffeomorphismus:
   $\widetilde{D}$ offen in $\mathbb{R}^3$. Wie in 1. gilt, daß $\widetilde{f}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

   Wie in Aufgabe 29, Punkt 2, folgt aus der lokalen Diffeomorphie, sowie der Bijektivität von $\widetilde{f}$ die Diffeomorphie von $\widetilde{f}$.

**Bemerkung:** Ebenso kann die Diffeomorphie von $f$ für jede andere Reihenfolge $x_{\pi(1)} < x_{\pi(2)} < x_{\pi(3)}$, $\pi$ Permutation, gezeigt werden.