UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 8

Abgabe 10.06.02

33. **Bilineare Abbildungen. (8 Punkte)** a) Seien $n, m, l \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung

$$F : \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$$

heißt bilinear, falls

$$F(x^1 + \lambda x^2, y) = F(x^1, y) + \lambda F(x^2, y), \quad F(x, y^1 + \lambda y^2) = F(x, y^1) + \lambda F(x, y^2)$$

für $x, x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, $y, y^1, y^2 \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Man zeige an Hand der Definition: Jede bilineare Abbildung ist total differenzierbar. Man berechne die totale Ableitung.

b) Man berechne die totale Ableitung der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{n^2} \oplus \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$$

$$f(A, B) = AB$$

wobei A und B $n \times n$ Matrizen sind und auf der rechten Seite die Matrixmultiplikation von A und B steht. Man berechne die totale Ableitung der Abbildung $g(A) = f(A, A) = AA$ angewandt auf eine Matrix B. Man komplettiere die Argumentation von Beispiel 31.8 b). Hinweis: Man gebe $f'(A, B)(C, D)$ an.

c) Man berechne die totale Ableitung des Skalarprodukt

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

d) Das Kreuzprodukt ist durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - y_x y_1 \end{pmatrix}$$

Man gebe die totale Ableitung an. Man zeige für alle Vektoren in $\mathbb{R}^3$

$$x \times y = -y \times x, \quad (x \times y, x) = 0, \quad (x \times y, x) = 0$$

34. Man zeige, daß die Gleichung

$$\cos(xy) + x^2 - 2y - 1 = 0$$

in der Nähe von $x = y = 0$ nach y aufgelöst werden kann. Für die Auflösung $g(x) = y$ berechne man $g'(0)$ und $g''(0)$.

35. Welche der folgenden Mengen sind Mannigfaltigkeiten? Man bestimme gegebenfalls die Dimension und den Tangentialraum an einem beliebigen Punkt.

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0\}$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R}^n | \text{ Es existiert } y \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } x_1 = \sin(y_1 y_2), x_2 = 2y_1 + \cos(y_1), x_3 = y_2 - e^{y_1}\}$$

$$M_4 = N(A), \quad M_5 = R(A).$$

wobei A eine $n \times m$ Matrix vom Rang $0 < p < n$ ist. Der Nullraum $N(A)$ von A ist die Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ der Vektoren x für die gilt: $Ax = 0$. Der Bildraum ist $R(A) := A(\mathbb{R}^n)$, wobei wir A mit der entsprechnden linearen Abbildung identifizieren.