

Musterlösung zu Blatt 8

Aufgabe 33:

a) Sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ bilinear.

Beh.: In jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist F total differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$F'(x, y)(h) = F(x, h_2) + F(h_1, y) \text{ für } h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Bew.: Es gilt aufgrund der Bilinearität von F :

$$\begin{aligned} F((x, y) + (h_1, h_2)) &= F(x, y + h_2) + F(h_1, y + h_2) \\ &= F(x, y) + \underbrace{F(x, h_2) + F(h_1, y)}_{=: F'(x, y)(h)} + \underbrace{F(h_1, h_2)}_{=: \rho(h)} \end{aligned}$$

Nun gilt für die so definierte Abbildung $F'(x, y) \in L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, da F eine bilineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen ist und somit in jeder Komponente linear und stetig ist und die Summe zweier linearer und stetiger Abbildungen auch wieder linear und stetig ist.

Außerdem ist F stetig, denn es gilt: Die Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l), x \mapsto F(x, \cdot)$$

ist eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen und somit gilt:

$$\|L(x)\|_{L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)} \leq \|L\|_{L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l))} |x|$$

Also folgt

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &= |L(x)(y)| \leq \|L(x)\|_{L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)} |y| \\ &\leq \|L\|_{L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l))} |x| |y| \\ &\leq c (|x|^2 + |y|^2) \end{aligned}$$

mit $c := \frac{1}{2} \|L\|_{L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l))}$ aufgrund von $2|x||y| \leq |x|^2 + |y|^2$ (nach der 2. binomischen Formel).

Für die oben definierte Abbildung ρ gilt daher folgende Abschätzung:

$$|\rho(h)| = |F(h_1, h_2)| \leq c(|h_1|^2 + |h_2|^2)$$

Insgesamt folgt nun: $|\rho(h)| = o(|h|)$, also gilt die Behauptung.

- b) Im Folgenden wird zur Vereinfachung der Notation der Raum der $n \times n$ Matrizen mit dem \mathbb{R}^{n^2} identifiziert. Dabei sind die verschiedenen Operationen entsprechend zu verstehen.

Beh.1: Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}, f(A, B) = AB$$

ist total differenzierbar und die totale Ableitung ist gegeben durch

$$f'(A, B) : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

$$f'(A, B)(H) = AH_2 + H_1B \text{ für } H = (H_1, H_2)$$

Bew.: f ist bilinear und somit folgt die Behauptung aus Teil a).

Beh.2: Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}, g(A) := f(A, A)$$

ist total differenzierbar mit Ableitung

$$g'(A) : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}, g'(A)(H) = AH + HA \text{ für } H \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Bew.: Es gilt (mit den Bezeichnungen von oben)

$$\begin{aligned} g(A + H) &= f(A + H, A + H) = f(A, A) + f'(A, A)(H, H) + \rho(H, H) \\ &= g(A) + g'(A)(H) + \sigma(H) \end{aligned}$$

mit $\sigma(H) := \rho(H, H)$. Die gewünschten Eigenschaften folgen aus Teil a).

Man kann die Argumentation von Beispiel 31.8 wie folgt komplettieren:
Die Ableitung der Funktion

$$Inv : GL(n) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}, Inv(A) = A^{-1}$$

ist gegeben durch

$$Inv'(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1} \text{ für } H \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Dies wurde in der Vorlesung bereits mit Hilfe der Neumannschen Reihe gezeigt und kann nun nochmal mit dem Satz über implizite Funktionen bewiesen werden:

Als erstes ist zu bemerken, dass $GL(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ offen ist (siehe Vorlesung). Definiere die Hilfsfunktion

$$h : GL(n) \times GL(n) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}, h(A, B) = AB - E_n$$

Zu $A \in GL(n)$ ist nun $B = A^{-1}$ die eindeutige Lösung von $h(A, B) = 0$, also ist Inv die (globale) Auflösungsfunktion der Gleichung $h(A, B) = 0$ nach B .

Aus Teil b) folgt, dass h total differenzierbar (und auch $h \in \mathcal{C}^1(GL(n) \times GL(n), \mathbb{R}^{n^2})$) ist mit den linearen Abbildungen

$$\partial_A h(A, B)(H) = HB \text{ sowie } \partial_B h(A, B)(H) = AH$$

als Ableitungen nach A bzw. B . Außerdem ist $\partial_B h(A, A^{-1})$ invertierbar ($H \mapsto A^{-1}H$ ist die inverse Abbildung). Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt für die Ableitung der Auflösungsfunktion damit:

$$Inv'(A)(H) = -(\partial_B h(A, A^{-1}))^{-1} \circ \partial_A h(A, A^{-1})(H) = -A^{-1}HA^{-1}$$

c) (*Skalarprodukt*): Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Beh.: Die Abbildung

$$S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, S(x, y) = \langle x, y \rangle$$

ist total differenzierbar mit Ableitung im Punkt (x, y) :

$$S'(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S'(x, y)(h) = \langle x, h^{(2)} \rangle + \langle h^{(1)}, y \rangle \text{ wobei } h = (h^{(1)}, h^{(2)})^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Bew.: S ist bilinear, somit folgt die Behauptung aus Teil a).

d) (*Kreuzprodukt*): Für $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$ sei

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Beh.1: Die Abbildung

$$K : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, K(x, y) = x \times y$$

ist total differenzierbar mit Ableitung im Punkt (x, y) :

$$K'(x, y) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$K'(x, y)(h) = x \times h^{(2)} + h^{(1)} \times y \text{ wobei } h = (h^{(1)}, h^{(2)}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

Bew.: K ist bilinear und somit folgt die Behauptung aus Teil a).

Beh.2: Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ gelten die Rechenregeln:

$$x \times y = -y \times x, \quad \langle x \times y, x \rangle = 0, \quad \langle x \times y, y \rangle = 0$$

Bew.:

Es gilt

$$\begin{aligned} x \times y &= \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(x_3 y_2 - x_2 y_3) \\ -(x_1 y_3 - x_3 y_1) \\ -(x_2 y_1 - x_1 y_2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_2 x_3 - y_3 x_2 \\ y_3 x_1 - y_1 x_3 \\ y_1 x_2 - y_2 x_1 \end{pmatrix} \\ &= -y \times x \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \langle x \times y, x \rangle &= x_2 y_3 x_1 - x_3 y_2 x_1 + x_3 y_1 x_2 - x_1 y_3 x_2 + x_1 y_2 x_3 - x_2 y_1 x_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt auch

$$\langle x \times y, y \rangle = -\langle y \times x, y \rangle = 0$$

Aufgabe 34:

Beh.: In der Nähe von $(0, 0)$ kann die Gleichung

$$\cos(xy) + x^2 - 2y - 1 = 0$$

nach y aufgelöst werden. Für die Auflösungsfunktion g gilt $g'(0) = 0$ und $g''(0) = 1$.

Bew.:

Definiere $f(x, y) = \cos(xy) + x^2 - 2y - 1$. Es gilt $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $f(0, 0) = 0$ und

$$D_y f(x, y) = -x \sin(xy) - 2 \Rightarrow D_y f(0, 0) = -2 \neq 0$$

Für kleine $|x|$ gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Auflösungsfunktion g , für welche man

$$g'(x) = -\frac{g(x) \sin(xg(x)) - 2x}{x \sin(xg(x)) + 2}$$

und wegen $g(0) = 0$ somit $g'(0) = 0$ berechnet. Außerdem ist

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{g'(x) \sin(xg(x)) + g(x) \cos(xg(x))(g(x) + xg'(x)) - 2}{x \sin(xg(x)) + 2} \\ &\quad + \frac{(g(x) \sin(xg(x)) - 2x)(\sin(xg(x)) + x \cos(xg(x))(g(x) + xg'(x)))}{(x \sin(xg(x)) + 2)^2} \end{aligned}$$

Also gilt $g''(0) = 1$.

Aufgabe 35:

1. Die Menge

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0\}$$

ist keine Mannigfaltigkeit, denn:

Wäre $M_1 \in \mathfrak{M}_p^k(2)$, so gäbe es zu $(0, 0) \in M_1$ eine bzgl. M_1 offene Umgebung V^{M_1} , eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und eine Abbildung $\psi \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^3)$ (mit $\text{rk } D\psi(u) = p$ auf U), so dass $\psi : U \rightarrow V^{M_1}$ eine Homöomorphie ist. Man kann oBdA annehmen, dass $U \subseteq \mathbb{R}^p$ zusammenhängend ist (durch evtl. Verkleinerung der Umgebungen). Also müsste $V^{M_1} \setminus \{(0, 0)\}$ für $p = 1$ aus zwei Wegzusammenhangskomponenten bestehen und für $p \geq 2$ wegzusammenhängend sein, was beides nicht der Fall ist, da $V^{M_1} \setminus \{(0, 0)\}$ aus vier Wegzusammenhangskomponenten besteht.

2. Die Menge

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$$

ist eine Mannigfaltigkeit, genauer:

$$M_2 \in \mathfrak{M}_2^\infty(3)$$

denn:

Definiere $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 1$. Es ist $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$$

Außerdem gilt für jedes $x \in M_2$: $\text{rk } Df(x) = \text{rk}(x_1, 2x_2, 3x_3^2) = 1$, da $x \neq 0$.

Der *Tangentenraum* in $q \in M_2$ ist gegeben durch

$$T_q(M_2) = N(f'(q)) = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid q_1 x_1 + 2q_2 x_2 + 3q_3^2 x_3 = 0\}$$

3. Für die Menge

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists y \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \sin(y_1 y_2), x_2 = 2y_1 + \cos(y_1), x_3 = y_2 - e^{y_1}\}$$

gilt

$$M_3 \in \mathfrak{M}_2^\infty(3)$$

denn:

Definiere $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\psi(y_1, y_2) = (\sin(y_1 y_2), 2y_1 + \cos(y_1), y_2 - e^{y_1})^T$$

Damit ist $M_3 = \psi(\mathbb{R}^2)$. Es gilt $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ mit

$$D\psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_2 \cos(y_1 y_2) & y_1 \cos(y_1 y_2) \\ 2 - \sin(y_1) & 0 \\ -e^{y_1} & 1 \end{pmatrix}$$

und sowie $\text{rk } D\psi(y_1, y_2) = 2$ für alle $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Es ist

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_3$$

eine Homöomorphie:

Die Funktion $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \eta(t) = 2t + \cos(t)$ ist bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion, da $\eta'(t) = 2 - \sin(t) > 0$ erfüllt ist und $\eta(t) \rightarrow \pm\infty$ für $t \rightarrow \pm\infty$ gilt (siehe AnaI). Daher ist

$$\phi : M_3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \phi(x_1, x_2, x_3) = (\eta^{-1}(x_2), x_3 + e^{\eta^{-1}(x_2)})^T$$

eine stetige Umkehrabbildung von $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M_3$, also folgt die Behauptung.

Der *Tangentenraum* im Punkt $q = \psi(a)$ ist

$$T_q(M_3) = \psi'(a)(\mathbb{R}^2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_2 \cos(a_1 a_2) \\ 2 - \sin(a_1) \\ -e^{a_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \cos(a_1 a_2) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Sei A eine $m \times n$ Matrix vom Rang $0 < p < n$

Die Mengen

$$M_4 = N(A) \text{ und } M_5 = R(A)$$

sind Mannigfaltigkeiten, genauer:

$$M_4 \in \mathfrak{M}_{n-p}^\infty(n) \text{ und } M_5 \in \mathfrak{M}_p^\infty(m)$$

Außerdem gilt für die *Tangentialräume*:

$$T_q(M_4) = M_4 \text{ für alle } q \in M_4$$

und

$$T_q(M_5) = M_5 \text{ für alle } q \in M_5$$

Zeige dazu: Für jeden k -dimensionalen Teilraum V des \mathbb{R}^l (wobei $0 < k < l$) gilt

$$V \in \mathfrak{M}_k^\infty(l)$$

und

$$T_q(V) = V \text{ für alle } q \in V$$

Sei (v_1, \dots, v_k) eine Basis von V . Ergänze diese zu einer Basis $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_l)$ des \mathbb{R}^l und bezeichne mit V die $l \times l$ Matrix $V = (v_1, \dots, v_l)$. Definiere

$$\Phi : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l, \Phi(x) = V^{-1}x$$

Offenbar ist Φ ein \mathcal{C}^∞ -Diffeomorphismus und

$$\Phi(V) = \mathbb{R}_k = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}^k \right\}$$

Also ist nach Definition $V \in \mathfrak{M}_k^\infty(l)$.

Für den Tangentialraum in $q \in V$ gilt nach Definition des Tangentialkegels natürlich $T_q(V) = V$. Man kann dies auch so ausrechnen:

$$\begin{aligned} T_q(V) &= (\Phi'(q))^{-1}(\mathbb{R}_k) \\ &= \left\{ (v_1 \ \cdots \ v_k \ v_{k+1} \ \cdots \ v_l) \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}^k \right\} \\ &= \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = V \end{aligned}$$

Die obigen Aussagen für die Untervektorräume M_4 und M_5 folgen nun hieraus aufgrund von

$$\dim M_5 = p$$

und der Dimensionsformel:

$$\dim M_4 = n - p$$