UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 9

Abgabe 17.06.02

36. **Potential, 4+1 Punkte** Existieren Potentiale für folgende Vektorfelder? Man bestimme gegebenfalls die Potentiale.

$$v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad v(x)=x$$

$$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad v(x)=\begin{pmatrix}x_1\\-x_2\end{pmatrix}$$

$$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad v(x)=\begin{pmatrix}\cos(x_2)e^{x_1}\\\sin(x_2)e^{x_1}\end{pmatrix}$$

$$v:\mathbb{R}^2\backslash\{\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}|x_1\in(-\infty,0]\}\to\mathbb{R}^2,\quad v(x)=\begin{pmatrix}x_2/|x|^2\\x_1/|x|^2\end{pmatrix}$$

$$v:\mathbb{R}^2\backslash\{\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}|x_1\in(-\infty,0]\}\to\mathbb{R}^2,\quad v(x)=\begin{pmatrix}-x_2/|x|^2\\x_1/|x|^2\end{pmatrix}$$

Hinweis: Man integriere über geeignete Wege.

37. **Homogene Funktionen.** Eine Funktion $f:\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $s\in\mathbb{R}$, falls für alle $t\in[0,\infty)$ und $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ gilt

$$f(tx)=t^s f(x).$$

a) Man zeige die Eulersche Identität für $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$:

$$<\text{ grad } f(x),x>=sf(x)$$

b) Sei f homogen vom Grad s und v der Gradient. Man zeige: Für x und t wie oben gilt

$$v(tx)=t^{s-1}v(x).$$

38. Es sei $A=(a_{ij})$ eine $n\times n$ Matrix und

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

Ist f eine homogene Funktion? Ist 1 ein regulärer Wert von f? Sei x ein beliebiger Punkt in $N_1(f)$. Man gebe eine Formel für $T_xN_1(f)$ an.

39. Es sei $D\subset\mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten Abbildungen $g\in C^1(D,\mathbb{R}^n)$ gegeben, wobei $g_j(x)$ nur von den Variablen $x_1,\dots,x_{j-1}$ abhängt (für $j=2,\dots n$). Insbesondere sei $g_1(x)=:c$ unabhängig von x. Wir definieren $f\in C^1(D,\mathbb{R}^n)$ durch $f(x)=x+g(x)$. Man zeige: Die Abbildung f ist ein C^1 Diffeomorphismus auf ihr Bild. Man drücke die Funktionalmatrix der Umkehrabbildung durch partielle Ableitungen von g aus.