Musterlösung zu Blatt 9

Aufgabe 36.

i) $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v(x) = x$

Man bemerkt sofort daß für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ gilt: grad $g = v$, also ist g ein Potential für v.

ii) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

Es gilt: $Dv(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ welche eine symmetrische Matrix ist, $\mathbb{R}^2$ ist eine sternförmige Menge z.B. bezüglich $(0,0)$, daher besitzt das Vektorfeld v ein Potential. Für $t \in [0,1]$ und $x \in \mathbb{R}^2$ definiert $\gamma(t) = (tx_1, tx_2)$ ein Weg zwischen den Punkten 0 und x, daher kann man ein Potential konstruieren durch:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}\ (t)\rangle dt = \int_0^1 \left(v_1(tx_1, tx_2) \cdot x_1 + v_2(tx_1, tx_2) \cdot x_2\right) dt \\ &= \int_0^1 (tx_1^2 - tx_2^2) dt = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right). \end{aligned}$$

iii) $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_2)e^{x_1} \\ \sin(x_2)e^{x_1} \end{pmatrix}$

Die Funktionalmatrix ist $Dv(a) = \begin{pmatrix} \cos(a_2)e^{a_1} & -\sin(a_2)e^{a_1} \\ \sin(a_2)e^{a_1} & \cos a_2 e^{a_1} \end{pmatrix}$, also i.A. nicht symmetrisch. Daher sind die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt (das Vektorfeld ist nicht wirbelfrei), also besitzt v kein Potential.

iv) $v : \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^2$, $v(x) = \begin{pmatrix} x_2/|x|^2 \\ x_1/|x|^2 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\partial_2 v_1(a) = (a_1^2 - a_2^2)/|a|^4$ und $\partial_1 v_2(a) = (-a_1^2 + a_2^2)/|a|^4 = -\partial_2 v_1(a) \neq \partial_2 v_1(a)$ für $a \in \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$. Die Integrabilitätsbedingungen sind nicht erfüllt, daher besitzt v kein Potential.

v) $v : \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{R}^2$, $v(x) = \begin{pmatrix} -x_2/|x|^2 \\ x_1/|x|^2 \end{pmatrix}$

In diesem Fall gilt: $\partial_2 v_1(a) = (-a_1^2 + a_2^2)/|a|^4$ und $\partial_1 v_2(a) = (-a_1^2 + a_2^2)/|a|^4 = \partial_2 v_1(a)$ für $a \in \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$. Die Integrabilitätsbedingungen sind in diesem Fall erfüllt und die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$ ist sternförmig bezüglich dem Punkt $(1,0)$, daher besitzt v ein Potential.

Diesen kann man angeben, indem man über einen geeigneten Weg zwischen $(1,0)$ und $x = (x_1, x_2)$ integriert. Die Form des Vektorfeldes v führt auf natürliche Weise zur Verwendung von Polarkoordinaten und zur Konstruktion der Wege als Kreissegmente. Konstruiere zunächst ein Weg zwischen $(1,0)$ und $(|x|, 0)$ durch $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (1 + t(|x| - 1), 0)$. Es gilt dann:

$$\int_0^1 \langle v(\gamma_1(t)), \dot{\gamma_1}\ (t)\rangle dt = \int_0^1 \left(0 \cdot (|x| - 1) + v_2(\gamma_1(t)) \cdot 0\right) dt = 0$$

Für $x \in A = \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$ gilt $Arg(x) \in (-\pi, \pi)$. Definiere nun einen Weg zwischen $(|x|, 0)$ und (x_1, x_2) durch: $\gamma_x : [0, Arg(x)] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_x(\theta) = (|x| \cos\theta, |x| \sin\theta)$. Wegen $|Arg(x)| < \pi$ gilt dann $\gamma_x(\theta) \in A$, für alle $\theta \in [0, Arg(x)]$. Ein Potential fr̈ v ergibt sich durch $g(x) = \int_{\gamma_1} v dt + \int_{\gamma_x} v d\theta$. Da die Integration über den Weg γ_1 zwischen $(1,0)$ und $(|x|,0)$ Null ergibt, kann man somit ein Potential für v nur durch Integration auf dem Weg γ_x konstruieren:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{Arg(x)} \langle v(\gamma_x(\theta)), \dot{\gamma_x}(\theta)\rangle d\theta \\ &= \int_0^{Arg(x)} \Big(v_1(|x|\cos\theta, |x|\sin\theta)\cdot(-|x|\sin\theta) + v_2(|x|\cos\theta, |x|\sin\theta)\cdot |x|\cos\theta\Big) d\theta \\ &= \int_0^{Arg(x)} \left(-\frac{|x|\sin\theta}{|x|^2}\cdot(-|x|\sin\theta) + \frac{|x|\cos\theta}{|x|^2}\cdot|x|\cos\theta\right) d\theta \\ &= \int_0^{Arg(x)} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta = \int_0^{Arg(x)} 1 d\theta = Arg(x) = Arg(x_1 + ix_2). \end{aligned}$$

Aufgabe 37.

b) Zu zeigen ist: $(\partial_i f)(tx) = t^{s-1}(\partial_i f)(x)$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wegen der Homogenitätseigenschaft von f gilt für $y = tx$: $f(y) = t^s f(y/t)$. Wenn man diese Identität unter Benutzung der Kettenregel partiell nach der i-ten Koordinate ableitet, erhält man:

$$(\partial_i f)(y) = t^s (\partial_i f)(\frac{y}{t})\frac{1}{t} = t^{s-1}(\partial_i f)(\frac{y}{t})$$

Da $y = tx$ gilt, erhält man die gewünschte Aussage.

a) 1.Variante

Wenn man die Identität $f(tx) = t^s f(x)$ nach t ableitet, erhält man: $\langle \text{grad } f(tx), x\rangle = st^{s-1}f(x)$. Wenn man nun $t = 1$ setzt, erhält man $< \text{grad } f(x), x \rangle >= sf(x)$.

2. Variante

Unter Benutzung des Resultats aus b) erhält man:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f(x), x\rangle &= \int_1^2 \langle \text{grad } f(x), x\rangle dt = \int_1^2 \langle \text{grad } f(t\cdot\frac{x}{t}), x\rangle dt \\ &= \int_1^2 t^{s-1}\langle \text{grad } f(\frac{x}{t}), x\rangle dt = \int_1^2 -t^{s+1}\langle \text{grad } f(\frac{x}{t}), -\frac{x}{t^2}\rangle dt \\ &= \int_1^2 -t^{s+1} g_x'(t) dt, \end{aligned}$$

mit $g_x : [1,2] \to \mathbb{R}$, $g_x(t) = f(x/t)$. Nach partieller Integration gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f(x), x\rangle &= -t^{s+1}g_x(t)\Big|_1^2 + \int_1^2 (s+1)t^s g_x(t) dt \\ &= -2^{s+1}f(x/2) + f(x) + \int_1^2 (s+1)t^s f(x/t) dt \\ &= -2f(x) + f(x) + \int_1^2 (s+1) f(x) dt \\ &= sf(x), \end{aligned}$$

wobei die Homogenität von f berücksichtigt wurde. Die gewünschte Identität ist somit bewiesen.

Aufgabe 38.

Es gilt:

$$f(tx) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot (tx_i) \cdot (tx_j) = t^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = t^2 f(x)$$

Daher ist die Funktion f homogen von Grad 2.

Weiterhin gilt für alle $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$(Df(x))_i = 2a_{ii}x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} (a_{ij} + a_{ji})x_j = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + a_{ji})x_j$$

Falls der Wert 1 nicht angenommen wird, ist nichts zu zeigen. Sonst ist 1 regulärer Wert von f genau dann, wenn rk $Df(x) = 1$ für alle $x \in N_1(f)$, d.h. wenn es mindestens ein i gibt, mit $(Df(x))_i \neq 0$.

Angenommen dies würde nicht gelten, d.h. $Df(x) = \text{grad } f(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ für ein $x \in N_1(f)$. Unter Verwendung von Aufgabe 37 gilt dann:

$$0 = \langle \text{grad } f(x), x \rangle = 2f(x) = 2$$

was natürlich ein Widerspruch ist.

Daher gilt: $N_1(f)$ ist eine $(n-1)$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} T_x(N_1(f)) &= N(f'(x)) = \{y \in \mathbb{R}^n : Df(x) \cdot y = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + a_{ji})x_j \right) y_i = 0\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 39.

Nach den Voraussetzungen gilt:

$$f(x) = x + g(x) = \begin{pmatrix} x_1 + c \\ x_2 + h_2(x_1) \\ \vdots \\ x_j + h_j(x_1, \ldots, x_{j-1}) \\ \vdots \\ x_n + h_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

mit $h_j \in C^1(D_j, \mathbb{R})$, wobei $D_j = \pi_{j-1}D$ die Projektion der Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ auf den ersten $j-1$ Koordinaten ist.

Zeige zunächst die Injektivität von f. Falls $f(x) = f(x')$, folgt wegen der Form der ersten Komponente von f sofort $x_1 = x'_1$. Die Gleicheit der zweiten Komponenten impliziert daher: $x_2 + h_2(x_1) = x'_2 + h_2(x'_1) = x'_2 + h_2(x_1)$ also ist auch $x_2 = x'_2$. Durch sukkesives Einsetzen der bereits bewiesenen Gleichheiten $x_i = x'_i$ für $i < j$ erhält man daher: $x_j + h_j(x_1, \ldots, x_{j-1}) = x'_j + h_j(x_1, \ldots, x_{j-1})$, also gilt $x_j = x'_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Die Funktion $f : D \to f(D)$ ist also invertierbar. Die Funktionalmatrix ist gegeben durch:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \partial_1 h_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 h_j & \ldots & \partial_{j-1} h_j & 1 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ \partial_1 h_n & \ldots & \ldots & \partial_{n-1} h_n & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $\partial_i h_j$ als $\partial_i h_j(x_1, \ldots, x_{j-1})$ verstanden ist, für $1 \leq i < j$.

Es gilt offensichtlich $\det Df(a) = 1$ für alle $a \in D$, also ist nach dem Satz über inverse Funktionen die (globale) Inverse $f^{-1} : f(D) \to D$ auch C^1-differenzierbar. Laut Aufgabe 27, Blatt 6, ergibt sicht die Funktionalmatrix der inversen Abbildung als: $Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}$ mit $x = f^{-1}(y)$.

Man kann sukkzesiv die Inverse für $n = 2, 3, 4$ ausrechnen, mit der Bemerkung daß für die Inverse A_n^{-1} der Matrix $A_n = Df(x)$ für f definiert auf $\mathbb{R}^n$ folgende Eigenschaft gilt:

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} & 0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ a^T & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Für $n = 4$ gilt also:

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}
a &= -\partial_1 h_2(x_1) \\
b &= -\partial_1 h_3(x_1, x_2) + \partial_1 h_2(x_1) \cdot \partial_2 h_3(x_1, x_2) \\
c &= -\partial_2 h_3(x_1, x_2) \\
d &= -\partial_1 h_4(x_1, x_2, x_3) + \partial_1 h_3(x_1, x_2) \cdot \partial_3 h_4(x_1, x_2, x_3) + \partial_1 h_2(x_1) \cdot \partial_2 h_4(x_1, x_2, x_3) - \\
&\quad -\partial_1 h_2(x_1) \cdot \partial_2 h_3(x_1, x_2) \cdot \partial_3 h_4(x_1, x_2, x_3) \\
e &= -\partial_2 h_4(x_1, x_2, x_3) + \partial_2 h_3(x_1, x_2) \cdot \partial_3 h_4(x_1, x_2, x_3) \\
f &= -\partial_3 h_4(x_1, x_2, x_3)
\end{aligned}$$

Es läßt sich nun folgende Form der Einträge der Inversen herleiten: $a_{ij} = 0$ für $i < j$, $a_{ii} = 1$ und

$$a_{ij} = -\partial_j h_i + \sum_{k=1}^{i-j-1} (-1)^{k+1} \sum_{j<l_1<\cdots<l_k<i} \partial_j h_{l_1} \cdot \partial_{l_1} h_{l_2} \cdot \cdots \cdot \partial_{l_k} h_i$$

für $i > j$.

Da für die Funktionalmatrix $Df(x) = (b_{ij})$ gilt:

$$b_{ij} = \begin{cases} \partial_j h_i & \text{für } i > j \\ 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i < j, \end{cases}$$

läßt sich nun überprüfen daß für $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ in der Tat $A \cdot B = E_n$ gilt.

Für $i < j$ gilt wegen der Subdiagonalform der Matrizen A und B offensichtlich $(A \cdot B)_{ij} = 0$ und $(A \cdot B)_{ii} = 1$.

Für $i > j$ gilt:

$$\begin{aligned}
(A \cdot B)_{ij} &= \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj} \\
&= \sum_{l=1}^{i-1} \left(-\partial_l h_i + \sum_{k=1}^{i-l-1} (-1)^{k+1} \sum_{l<l_1<\cdots<l_k<i} \partial_l h_{l_1} \cdot \partial_{l_1} h_{l_2} \cdot \cdots \cdot \partial_{l_k} h_i \right) \cdot b_{lj} \\
&\quad +1 \cdot \partial_j h_i + \sum_{l=i+1}^{n} 0 \cdot b_{lj}
\end{aligned}$$

Wegen der Form von b_{lj} gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}
(A\cdot B)_{ij} &= \sum_{l=1}^{j-1} 0 + \sum_{l=j}^{j}\left(-\partial_l h_i + \sum_{k=1}^{i-l-1}(-1)^{k+1}\sum_{l<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_l h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i\right)\cdot 1\\
&\quad + \sum_{l=j+1}^{i-1}\left(-\partial_l h_i + \sum_{k=1}^{i-l-1}(-1)^{k+1}\sum_{l<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_l h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i\right)\cdot\partial_j h_l + \partial_j h_i\\
&= -\partial_j h_i + \sum_{k=1}^{i-j-1}(-1)^{k+1}\sum_{j<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i - \sum_{l=j+1}^{i-1}\partial_j h_l\partial_l h_i\\
&\quad + \sum_{l=j+1}^{i-1}\sum_{k=1}^{i-l-1}(-1)^{k+1}\sum_{l<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_l\cdot\partial_l h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i + \partial_i h_j,
\end{aligned}$$

wobei die Summen die über eine leere Indexmenge summiert werden als 0 betrachtet werden. Unter dieser Kovention gilt also auch:

$$\sum_{k=1}^{i-l-1}(-1)^{k+1}\sum_{l<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_l\cdot\partial_l h_{l_1}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i = \sum_{k=1}^{i-j-1}(-1)^{k+1}\sum_{l<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_l\cdot\partial_l h_{l_1}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i,$$

da man zwischen l und i nicht mehr als $i-l-1$ disjunkte Indizes auswählen kann, also $\sum_{k=i-l}^{i-j-1}\sum_{l<l_1<\cdots<l_k<i} = 0$ ist.

Einige Terme mit engegengsetzten Vorzeichen heben sich weg, also für den Fall $i>j$ gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}
(A\cdot B)_{ij} &= \sum_{k=2}^{i-j-1}(-1)^{k+1}\sum_{j<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i\\
&\quad + \sum_{l=j+1}^{i-1}\sum_{k=1}^{i-j-1}(-1)^{k+1}\sum_{l<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_l\cdot\partial_l h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i\\
&= \sum_{k=2}^{i-j-1}(-1)^{k+1}\sum_{j<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i\\
&\quad + \sum_{k=1}^{i-j-1}(-1)^{k+1}\sum_{l=j+1}^{i-1}\sum_{l<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_l\cdot\partial_l h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i\\
&= \sum_{k=2}^{i-j-1}(-1)^{k+1}\sum_{j<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i\\
&\quad + \sum_{k=1}^{i-j-1}(-1)^{k+1}\sum_{j<l<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_l\cdot\partial_l h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i\\
&= \sum_{k=2}^{i-j-1}(-1)^{k+1}\sum_{j<l_1<\cdots<l_k<i}\partial_j h_{l_1}\cdot\partial_{l_1}h_{l_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{l_k}h_i\\
&\quad + \sum_{k'=2}^{i-j-1}(-1)^{k'}\sum_{j<j_1<\cdots<j_{k'}<i}\partial_j h_{j_1}\cdot\partial_{j_1}h_{j_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{j_{k'}}h_i\\
&\quad + \sum_{k'=i-j}^{i-j}(-1)^{k'}\sum_{j<j_1<\cdots<j_{k'}<i}\partial_j h_{j_1}\cdot\partial_{j_1}h_{j_2}\cdot\cdots\cdot\partial_{j_{k'}}h_i\\
&= 0+0=0,
\end{aligned}$$

da $\sum_{k'=i-j}^{i-j} = 0$ gilt, wobei man auch hier in der bekannten Weise argumentieren kann.

Die Inverse der Funktionalmatrix in einem Punkt $y = f(x)$ hat also die Einträge: $a_{ij} = 0$ für $i < j$, $a_{ii} = 1$ und

$$a_{ij} = -\partial_j h_i + \sum_{k=1}^{i-j-1} (-1)^{k+1} \sum_{j<l_1<\cdots<l_k<i} \partial_j h_{l_1} \cdot \partial_{l_1} h_{l_2} \cdot \cdots \cdot \partial_{l_k} h_i$$

für $i > j$, wobei die partiellen Ableitungen der Funktionen h_s in dem Punkt $(x_1, \ldots, x_{s-1})^T$ ausgewertet sind.

2. Methode Die Matrix $A = Df(x)$ hat die Form $E_n + B$, wobei B eine echte Unterdiagonal-dreiecksmatrix ist. Es gilt $B^n = 0$, d.h. $B^m = 0$ für alle $m > n$, daher ist $A^{-1} = (E_n + B)^{-1} = E_n - B + B^2 - \cdots + (-1)^{n-1} B^{n-1}$. Da die Matrix B von den partiellen Ableitungen von g abhängt, ist diese Form auch eine mögliche Ausdrucksweise der Inversen im Sinne der Forderungen der Aufgabe.