UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 10

Abgabe 24.06.02

40. **Extremwertaufgeben 6+2 Punkte** Werden Maximum bzw. Minimum angenommen? Man bestimme lokale Extremalstellen.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_1(x) = x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^4 - x_2^2$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_2(x) = (x_1 + x_2^2)e^{-x_1^2 - x_2^2}$$

$$f_3 : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}, f_3(x) = 1 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_3^2$$

$$f_4 : S^1 = \partial K_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_4(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1 x_2$$

$$f_5 : S^2 = \partial K_1(0) \subset \mathbb{R}^3, f_5(x) = d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x\right)$$

Hinweis: Für f_3 müssen Ecken, Kanten und Inneres getrennt betrachtet werden. Bei f_4 und f_5 gibt es mehrere Möglichkeiten, z.B. die Verwendung von Lagrangeschen Multiplikatoren.

41. **Konvexe Funktionen, 6+2 Punkte.** Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Sie heißt strikt konvex, wenn für alle $x, y \in D, x \neq y$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y).$$

Man zeige:

1. f konvex $\iff \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, x_{n+1} > f((x_1, \ldots, x_n)^t)\}$ ist konvex .
2. Ist D zusätzlich offen, so ist jede konvexe Funktion stetig.
3. Ist D offen und konvex, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ so ist f genau dann konvex, wenn die Hessematrix $Hf(x)$ in jedem Punkt $x \in D$ positiv semidefinit ist.
4. Ist D abgeschlossen mit offenem Inneren und konvex und f strikt konvex, dann existiert genau eine (lokale und globale) Minimalstelle.

42. **Taylorpolynome.** Man berechne $T_0^3 f(h)$ für f_2 in Aufgabe 1 und für

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2 - x_3 \\ x_1 x_2 \sin(x_3) \end{pmatrix}.$$