# Musterlösung zu Blatt 10

## 1 Aufgabe 40 Extremwertaufgaben

Werden Maximum und Minimum angenommen? Man bestimme lokale Extremalstellen.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^4 - x_2^2$.
   Der Gradient lautet: $\mathrm{grad} f(x) = (3x_1^2 - 3x_1, 4x_2^3 - 2x_2)$ Die Hessematrix ist gegeben durch:
   $Hf(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 3 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 - 2 \end{pmatrix}$ Die kritischen Punkte von $f_1$ sind:
   $(1,0), (1, \frac{1}{\sqrt{2}}), (1, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0,0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Setzt man sie in die Hessematrix ein so folgt direkt, dass bei $(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ein Minimum vorliegt und bei $(0,0)$ ein Maximum vorliegt. Bei den restlichen Punkten ist die Hessematrix indefinit, es liegen also keine weiteren Extrema vor. Betrachtet man $f(a,0)$ mit $a \to -\infty$ dann folgt $f \to -\infty$. Genauso $f \to \infty$ für $b \to \infty$ und den Vektor $(0,b)$. Die Extremwerte sind also lokal.

2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x) = (x_1 + x_2^2)e^{-x_1^2 - x_2^2}$.
   Die partiellen Ableitungen, die man benötigt um den Gradienten und die Hessematrix auszurechnen sind in Aufgabe 42 aufgeführt. Kritische Punkte: Es ist das Gleichungssystem, welches durch die beiden Gleichungen $1 - 2(x_1 + x_2^2)x_1 = 0$ und $2x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^3 = 0$ gegeben ist zu lösen. Daraus erhält man die vier kritischen Punkte
   $$a = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right),\ b = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\ c = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right),\ d = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$$
   Rechnet man die Hessematrizen aus, dann sieht man, dass am Punkt $a$ und $b$ ein Maximum vorliegt. Am Punkt $c$ ist die Hessematrix indefinit, es liegt also kein Extremum vor. Am Punkt $d$ liegt ein Minimum vor. Für $|x| \to \infty$ geht $f \to 0$, also nimmt die Funktion Maximum und Minimum an.

3. $f_3 : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_3(x) = 1 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$.
   Die Funktion ist stetig, die Definitionsmenge kompakt, also nimmt sie Minimum und Maximum an. Wir untersuchen zunächst $(-1,1)^2$. Der Gradient von $f_3$ ist gegeben durch: $Df(x) = (-2x_1 - x_2, -x_1 - 2x_2)$. Das bedeutet der einzige kritische Punkt ist der Punkt (0,0). Die Hessematrix ist durch $Hf(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Die zugehörige quadratische Form ist durch $Q_H(x) = -2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$ gegeben. Sie ist für alle $x \neq 0$ echt kleiner als Null, also liegt ein Maximum vor. Als nächstes untersuchen wir die offenen Kanten. D.h. wir betrachten $f_3$ und halten jeweils eine Variable als $\pm 1$ fest. Also z.B. betrachte $f_3((x_1,x_2)^t)$ mit der Nebenbedingung $x_1 = 1,\ x_2 \in (-1,1)$. Anschaulich wäre das die rechte Kante des Vierecks. Setzen wir die Nebenbedingung ein, erhalten wir $\hat{f}(x_2) = -(x_2^2 + x_2)$. Dieses Polynom hat ein Maximum bei $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Also liegt ein mögliches Maximum von $f_3$ bei $(1,-\frac{1}{2})$ mit dem Funktionswert $f((1,-\frac{1}{2})^t)=\frac{1}{4}$. Tatsächlich liegt kein Maximum vor. Denn betrachten wir das Bild der direkten Verbindungsstrecke von $(0,0)$ zu $(1,-\frac{1}{2})$, $\gamma(t)=t\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+(1-t)\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\end{pmatrix},\ t\in[0,1]$
Dann gilt für $f_3(\gamma(t))=-\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}>\frac{1}{4},\ t\in(0,1]$. Also gibt es in jeder noch so kleinen Umgebung um $(1,-\frac{1}{2})^t$ geschnitten mit $[0,1]^2$ ein Punkt $a$, so dass $f_3(a)>\frac{1}{4}$ ist. Damit kann dort kein Maximum vorliegen.

Mit analoger Argumentation weisst man nach, dass an den Kanten keine weiteren Extrema vorliegen. Wir hatten aber oben festgestellt, dass die Funktion auf jeden Fall Minima und Maxima annehmen muss. Das heisst, es liegen in den Ecken jeweils die Minima der Funktion. (Stellt man sich die Funktion eingeschränkt auf ihre Kanten vor, so sind das jeweils nach unten geöffnete Parabeln. An den Eckpunkten liegen auf jeden Fall die kleinsten Funktionswerte).

4. $f_4: S^1\to\mathbb{R},\ f_4(x)=x_1^2-2x_2^2+x_1x_2$.
$S^1\subset\mathbb{R}^2$ ist kompakt und $f_4$ ist stetig. Also nimmt $f_4$ ihr Maximum und Minimum an. Wir rechnen mit Lagrangeschen Multiplikatoren. Sei $h(x_1,x_2,\lambda)=f_4(x)+\lambda(x_1^2+x_2^2-1)$. Setzt man den Gradient von $h=0$, dann erhält man folgende zwei( von insgesamt 3) Gleichungen:

$$2x_1+x_2+2\lambda x_1=0\ \wedge\ -4x_2+x_1+2\lambda x_2=0$$

multipliziert man die erste Gleichung mit $x_2$ die zweite mit $x_1$ und zieht dann die zweite von der ersten ab und nutzt die Nebenbedingung $x_1^2+x_2^2-1=0$, so erhält man:

$$6x_1x_2+x_2^2-x_1^2=0\overset{\text{NB}}{=}6x_1\sqrt{1-x_1^2}+1-2x_1^2=0$$

bzw

$$6x_1x_2+x_2^2-x_1^2=0\overset{\text{NB}}{=}6x_1\left(-\sqrt{1-x_1^2}\right)+1-2x_1^2=0$$

Unter Verwendung der Gradientenbedingung von $h$ berechnet man nun 4 kritische Punkte:
$a=\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{40}}},\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{40}}}\right)$, $b=\left(-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{40}}},\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{40}}}\right)$,
$c=\left(-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{40}}},-\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{40}}}\right)$, $d=\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{40}}},-\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{40}}}\right)$,
Rechnet man die Funktionswerte aus, so stellt man fest, dass $f(a)=f(c)$, $f(b)=f(d)$ und $f(a)>f(b)$ ist. Also liegt an den Punkten $a,c$ je ein Maximum vor und an den Punkten $b,d$ ein Minimum.

5. $f_5: S^2\to\mathbb{R},\ f_5(x)=\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2}$.
$S^2$ ist auch wieder kompakt, $f_5$ ist stetig, also nimmt die Funktion Maximum und Minimum an. Aufgrund der Monotonie von $x^2$ auf $[0,\infty)$ suchen wir die kritischen Punkte der Funktion $f_5^2$, da die Lage und Art der Extrempunkte von $f_5$ und $f_5^2$ übereinstimmen. Wir verwenden Lagrangesche

Multiplikatoren. D.h. wir betrachten die Hilfsfunktion $h(x_1, x_2, x_3, \lambda) = f_5^2(x) + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$. Der Gradient von $h$ ist dann gegeben durch: $\text{grad}h(x_1, x_2, x_3, \lambda) = (2(x_1 - 1) - 2\lambda x_1, 2(x_2 - 1) - 2\lambda x_2, 2(x_3 - 1) - 2\lambda x_3), x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$ Auflösen der Bedingung $\text{grad}h = 0$ und einsetzen in die Nebenbedingung liefert $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}$ oder $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$. Daraus erhalten wir dann die beiden kritischen Punkte $a_{\lambda_1} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ und $a_{\lambda_2} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Für festes $\lambda$ reduziert sich das Argument von $h$ auf $(x_1, x_2, x_3)$. Bestimmen wir jetzt die Hessematrix von h (beachte für verschieden Punkte $\lambda$ erhalten wir verschiedene Funktionen $h$ und damit auch zwei verschiedene Hessematrizen!) so sieht man sofort, dass $Hh(a_{\lambda_1})$ positiv definit ist und damit ein Minimum vorliegt. $Hh(a_{\lambda_2})$ ist folglich negativ definit und es liegt ein Maximum vor.

# 2 Aufgabe 41 Konvexe Funktionen

Man zeige:

1. $f$ konvex $\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} > f((x_1, \ldots, x_n)^t)\}$ ist konvex.
   Beweis: Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} > f((x_1, \ldots, x_n)^t)\}$
   $\Rightarrow$: Sei $f$ konvex. Seien $a, b \in M$ Seien $a', b'$ die Vektoren, die entstehen, wenn die $n+1-$Komponente von $a, b$ weggelassen wird. Sei $\gamma(t) = (1-t)a + tb$. Dann ist zu zeigen $\gamma(t) \subset M$, für $0 \leq t \leq 1$ Sei $t^* \in (0,1),\ x^* = \gamma(t^*)$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_{n+1}^* &= (1 - t^*)a_{n+1} + t^* b_{n+1} \\ &> (1 - t^*)f(a') + t^* f(b') \\ &\geq f((1 - t^*)a' + t^* b') \\ &= f((x_1^*, \ldots, x_n^*)^t) \end{aligned}$$

   aufgrund der Definition der Menge $M$ und der Konvexität von $f$. $\Rightarrow x^* \in M$ und damit die Behauptung

   $\Leftarrow$: Sei nun $M$ konvex. Angenommen $f$ ist nicht konvex. Dann existieren $a, b \in D$ und $s \in [0,1]$ mit $f((1-s)a + sb) > (1-s)f(a) + sf(b)$. Also existiert $\delta > 0$ mit $f((1-s)a + sb) > (1-s)f(a) + sf(b) + \delta$. Das bedeutet schliesslich $\begin{pmatrix} (1-s)a + sb \\ (1-s)f(a) + sf(b) + \delta \end{pmatrix} \notin M$.
   Für $\epsilon > 0$ sind aber $\begin{pmatrix} a \\ f(a) + \epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ f(b) + \epsilon \end{pmatrix} \in M$. Da $(1-s)(f(a) + \epsilon) + s(f(b) + \epsilon) = (1-s)f(a) + sf(b) + \epsilon$ gilt, ist für $0 < \epsilon < \delta$ der Vektor $\begin{pmatrix} (1-s)a + sb \\ (1-s)f(a) + sf(b) + \epsilon \end{pmatrix} \notin M$. Also $M$ nicht konvex, Widerspruch. Daraus folgt dann die Behauptung.

2. Ist $D$ zusätzlich offen, so ist jede konvexe Funktion stetig.
   Wir beweisen zunächst den Spezialfall $f(0) = 0,\ \overline{K_1(0)} \subset D$ und die Stetigkeit von $f$ in 0. Den allgemeinen Fall führen wir dann auf diesen Spezialfall zurück.

(a) Für $\alpha \in (0,1]$ sei $C_\alpha := \max\{f(\alpha e_1), \dots, f(\alpha e_n), f(-\alpha e_1), \dots, f(-\alpha e_n)\}$ wobei $e_i$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. Wir zeigen nun

$$f(x) \leq C_\alpha, \ x \in \overline{K_\alpha(0)},$$

denn für $\lambda_i := \frac{1}{\alpha}\max\{0, x_i\}$ und $\lambda_{n+i} := \frac{1}{\alpha}\max\{0, -x_i\}$, für $i = 1, \dots, n$ und $\lambda_{2n+1} := 1 - \sum\limits_{i=1}^{2n} \lambda_i$ gilt $\lambda_i \geq 0, \ i = 1, \dots, 2n$ und (da $x \in \overline{K_\alpha(0)}$):

$$\lambda_{2n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha}|x_i| \geq 1 - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \geq 1 - \frac{1}{\alpha}\alpha = 0$$

, aufgrund der Hölderschen Ungleichung. Also genauer $\sum\limits_{i=1}^{2n} \lambda_i \leq 1$. Ausserdem gilt $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{2n} \lambda_i + \lambda_{2n+1} = 1$. Der Punkt $x$ besitzt also die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\alpha e_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(-\alpha e_i).$$

Dann gilt aufrund der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\alpha e_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(-\alpha e_i) \\ \text{Def. } C_\alpha &\leq \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i C_\alpha \\ &\leq C_\alpha \end{aligned}$$

(b) Ausserdem gilt $C_\alpha \geq 0$ und $|f(x)| \leq C_\alpha$, für $x \in \overline{K_\alpha(0)}$. Denn aufgrund der Vorraussetzung und der Konvexität von $f$ gilt:

$$0 = f(0) = f(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x)$$

,d.h. $-f(-x) \leq f(x) \overset{(a)}{\leq} C_\alpha$. Da für $x \in \overline{K_\alpha(0)}$ auch $-x \in \overline{K_\alpha(0)}$ ist und $f(-x) \leq C_\alpha$, folgt weiter $-f(-x) \geq -C_\alpha$. Daraus ergibt sich

$$-C_\alpha \leq -f(-x) \leq f(x) \leq C_\alpha.$$

Daraus folgt dann die Behauptung.

(c) Es gilt $f(\pm\alpha e_i) \leq \alpha f(\pm e_i)$. Denn

$$f(\pm\alpha e_i) = f(\pm\alpha e_i + (1-\alpha)0) \leq \alpha f(\pm e_i) + (1-\alpha)f(0) = \alpha f(\pm e_i).$$

(d) $f$ ist stetig in 0. Denn sei $0 < \epsilon < C_1$ beliebig (falls $C_1 = 0$ ist, ist nichts zu zeigen) definiere $\delta := \frac{\epsilon}{C_1} < 1$. Dann folgt aus $|x| < \delta$

$$\begin{array}{rcl} |f(x)| & \overset{(b)}{\leq} & C_\delta \\ & = & \max\{f(\delta e_1), \ldots, f(\delta e_n), f(-\delta e_1), \ldots, f(-\delta e_n)\} \\ & \overset{(c)}{\leq} & \delta \max\{f(e_1), \ldots, f(e_n), f(-e_1), \ldots, f(-e_n)\} \\ & = & \delta C_1 = \epsilon \\ & \Rightarrow & \text{f ist stetig in 0.} \end{array}$$

Jetzt folgt der allgemeine Fall: Sei $x_0 \in D$ beliebig. Da $D$ offen ist, gibt es ein $r > 0$, so dass $\overline{K_r(x_0)} \subset D$ ist. Wir betrachten nun die Menge

$$D' := \{\frac{1}{r}(x - x_0) | x \in D\}$$

und die Funktion

$$f' : D' \to \mathbb{R}, \quad f'(z) := f(rz + x_0) - f(x_0).$$

Die Menge und die Funktion sind grad so definiert, dass sie die Vorraussetzung für den Spezialfall erfüllen, also ist $f'$ stetig in 0. Es gilt ausserdem mit $z = \frac{1}{r}(x - x_0)$:

$$\lim_{z\to 0} f'(z) = \lim_{z \to 0} f(rz + x_0) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0)$$

, also dass $f$ genau dann stetig in $x_0$ ist, falls $f'$ stetig in 0 ist.

3. Ist $D$ offen und konvex, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ so ist $f$ genau dann konvex, wenn die Hessematrix $Hf(x)$ in jedem Punkt $x \in D$ positiv semidefinit ist. Beweis: Sei $f$ konvex. Wir definieren eine Hilfsfunktion. Für $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ nahe Null sei $\varphi(t) := f(x+th)$. Es gilt: $\varphi(t) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und aus $f$ konvex folgt $\varphi$ konvex. In der Vorlesung wurde gezeigt $\varphi''(0) = Q_{Hf(a)}$. Damit gilt:

$$f \text{ konvex} \Rightarrow \varphi(t) \text{ konvex} \Rightarrow \varphi''(t) \geq 0 \Rightarrow \varphi''(0) \geq 0 \Rightarrow Q_{Hf(a)} \geq 0.$$

Sei nun $Q_{Hf(a)} \geq 0$. Für $x, y \in D$ und $t \in [0, 1]$ definiere $\psi(t) = f((1 - t)x + ty) = f(x + t(y - x))$. $D$ ist offen, also existieren kleine $\epsilon > 0$ mit $I := (-\epsilon, 1 + \epsilon) \subset D$. Sei nun $t \in I$ und $0 \leq s \leq 1$, dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \psi''(t) & = & (y - x)^T Hf(x + t(y - x))(y - x) \overset{\text{n.Vor.}}{\geq} 0 \\ & \Rightarrow & \psi''(t) \geq 0 \\ & \Rightarrow & \psi \text{ konvex} \\ & \Rightarrow & \psi((1 - s)t_1 + st_2) \leq (1 - s)\psi(t_1) + s\psi(t_2),\ t_1, t_2 \in I. \end{array}$$

Mit $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$ gilt dann:

$$\psi(s) \leq (1 - s)\psi(0) + s\psi(1) \Rightarrow f((1 - s)x + sy) \leq (1 - s)f(x) + sf(y)$$

für $x, y \in D$.

4. Ist $D$ abgeschlossen mit offenem Inneren und konvex und $f$ strikt konvex, dann existiert genau eine (lokale und globale) Minimalstelle.

   - Existenz: Die Aussage ist i.a. falsch. Z.B. $D = [1, \infty)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Die Funktion $-\sqrt{x}$ ist strikt konvex auf D. Sie besitzt offensichtlich kein Minimum.
   - Eindeutigkeit: Für konvexe Funktion gilt:

     $$\forall\ a, b \in D : f((1-t)a + tb) \leq \max\{f(a), f(b)\},\ t \in [0,1]$$

     Da $f$ strikt konvex auf D ist, kann $f$ nicht lokal konstant sein, denn angenommen doch, d.h. es existiert ein $\delta > 0$ und $x_0 \in D$ mit $f$ konstant auf $M := K_\delta(x_0) \cap D$, dann gilt für $a, b \in M$:

     $$f((1-t)a + tb) = f(a) = f(a) - tf(a) + tf(a) = (1-t)f(a) + tf(a).$$

     Widerspruch zur strikten Konvexität. Also ist $f$ nicht lokal konstant. Angenommen es gäbe zwei Minimalstellen $x', x''$. Ohne Einschränkung $f(x') \leq f(x'')$. Da $x''$ lokales Minimum ist existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\forall x \in K_\epsilon(x'')\backslash\{x''\} \cap D :\ \ f(x) > f(x'')$ (echtes Minimum). Jetzt wähle $s \in [0,1]$ so, dass $z = (1-s)x' + sx'' \in K_\epsilon(x'')\backslash\{x''\} \cap D$ ist. Dann folgt: $f(z) \leq \max\{f(x'), f(x'')\} = f(x'')$, also ein Widerspruch.

# 3 Aufgabe 42 Taylorpolynome

Wir bezeichnen die Funktion $f_2$ aus Aufgabe 40 mit $f$. Das Taylorpolynom ist dann $T_0^3 f(h) = \sum\limits_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\frac{\partial^k}{\partial x^j \partial y^{k-j}} f)(0,0) h_1^j h_2^{k-j}$. Das heisst, man braucht einige partielle Ableitungen. Aufgrund des Satzes von Schwarz, kann man einige Ableitungen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
f_1 &= (1 - 2(x_1 + x_2^2)x_1)e^{-x_1^2 - x_2^2} \\
f_2 &= (2x_2 - 2(x_1 + x_2^2)x_2)e^{-x_1^2 - x_2^2} \\
f_{11} &= (-4x_1 - 2(x_1 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2^2)x_1^2)e^{-x_1^2 - x_2^2} \\
f_{12} &= (-2x_2 - 4x_1x_2 + 4(x_1 + x_2^2)x_1x_2)e^{-x_1^2 - x_2^2} \\
f_{22} &= (2 - 8x_2^2 - 2(x_1 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2^2)x_2^2)e^{-x_1^2 - x_2^2} \\
f_{111} &= (-6 + 12x_1^2 + 12(x_1 + x_2^2)x_1 - 8(x_1 + x_2^2)x_1^3)e^{-x_1^2 - x_2^2} \\
f_{112} &= (8x_1x_2 - 4x_2 + 4(x_1 + x_2^2)x_2 + 8x_1^2x_2 - 8(x_1 + x_2^2)x_1^2x_2)e^{-x_1^2 - x_2^2} \\
f_{122} &= (-2 + 4x_2^2 - 4x_1 + 16x_1x_2^2 + 4(x_1 + x_2^2)x_1 - 8(x_1 + x_2^2)x_1x_2^2)e^{-x_1^2 - x_2^2} \\
f_{222} &= (-24x_2 + 24x_2^3 + 12(x_1 + x_2^2)x_2 - 8(x_1 + x_2^2)x_2^3)e^{-x_1^2 - x_2^2}
\end{aligned}$$

Setzen wir den Punkt $(0,0)$ ein, und bilden schliesslich das Taylorpolynom, dann folgt: $T_0^3 f(h) = h_1 + h_2^2 - h_1^3 - h_1h_2^2$.
Jetzt sei $f(x) = \binom{x_1^2 - x_2 - x_3}{x_1x_2\sin(x_3)}$. Das Taylorpolynom einer vektorwertigen Funktion

berechnet man, indem man das Polynom seiner Zeilen berechnet. Die erste Funktion ist ein Polynom vom Grad weniger als 3. Also stimmt das Taylorpolynom mit der ersten Funktion überein. Für $g(x) = x_1 x_2 \sin(x_3)$ gilt dann: $T_0^3 g(h) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}((\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} h_3)^k f)(0)$. Berechnet man die partiellen Ableitungen und setzt die entsprechenden Werte ein, so erhält man $T_0^3 g(h) = h_1 h_2 h_3$. Schliesslich erhalten wir als Taylorpolynom von $f$: $T_0^3 f(h) = \begin{pmatrix} h_1^2 - h_2 - h_3 \\ h_1 h_2 h_3 \end{pmatrix}$.