



Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 11 Abgabe 1.07.02

43. **Banachscher Fixpunktsatz** a) Es seien $a > 2$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x) := x + a^{-4}(a - x^4)$. Man verifiziere die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für $f|_{[1,a]}$ und berechne die vierte Wurzel von a bis auf einen Fehler kleiner 10^{-4} .

44. **Newtonverfahren** Es sei $a > 0$. Man wende das Newtonverfahren an auf $f \in C^\infty((0, \infty))$,

$$f(x) = x^4 - a$$

um eine vierte Wurzel von a bis auf einen Fehler von 10^{-8} zu berechnen. Man zeige, daß das Newtonverfahren für alle Startwerte konvergiert.

45. **Lagrangesche Multiplikatoren.** Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^4)$,

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$

und

$$S = \{x \mid f(x) = 1, x_1 > 0\}.$$

Man zeige: Für $t \neq 1$ und $x_t = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimme man den Abstand zu S und den

nächsten Punkt auf S . Skizze! Die Antwort hängt wesentlich davon ab, ob $t > 2$ oder $t < 2$ ist.

46. **Nullmengen.** Man zeige: a) Jeder echte Untervektorraum des \mathbb{R}^n ist eine Nullmenge. Man zeige die Aussage zunächst im Falle $n = 1$: $\{0\} \subset \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge. b) Man zeige: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge und eine Borelmenge.