Aufgabe 43

Banachscher Fixpunktsatz:

1. f ist Selbstabbildung, d. h. $f([1,a]) \subset [1,a]$, denn:
Für $a > 2$ gilt $1 < f(1) = 1 + \frac{a-1}{a^4} < a$ und $1 < f(a) = -1 + a - \frac{1}{a^3} < a$
$\Rightarrow$ für $a > 2$ gilt: $f(1), f(a) \in [1,a]$.

$f'(x) = 1 - \frac{4x^3}{a^4}$ und $f''(x) = -\frac{12x^2}{a^4} < 0$ für $x \in [1,a]$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a^{4/3}}{4^{1/3}}$.

Es ist $\frac{a^{4/3}}{4^{1/3}} \in [1,a] \Leftrightarrow \frac{a^{4/3}}{4^{1/3}} < a \Leftrightarrow a^{1/3} < 4^{1/3} \Leftrightarrow a < 4$.

Fall 1 $(2 < a < 4)$: f eingeschränkt auf $[1,a]$ hat ein Maximum in $x = \frac{a^{4/3}}{4^{1/3}} \in [1,a]$.

Es gilt: $f(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}}) = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}} + \frac{a - \frac{a^{\frac{16}{3}}}{4^{\frac{4}{3}}}}{a^4} = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{a^3} - \frac{a^{\frac{4}{3}}}{4^{\frac{4}{3}}} = 3(\underbrace{\frac{a}{4}}_{<1})^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{a^3} < \frac{3}{4}a + \frac{1}{a^3} < \frac{3}{4}a + \frac{1}{2^3} <$

$\frac{3}{4}a + \frac{1}{8}a = \frac{7}{8}a < a$
Da die erste Ableitung von f keine weiteren kritischen Punkte liefert, wird das Minimum am Rand angenommen, also für $x = 1$ oder $x = a$ und $f(1), f(a) \in [1,a]$.

Fall 2 $(a > 4)$: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{a^{4/3}}{4^{1/3}}$. Da $a \geq 4$ ist, gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [1,a]$, f ist also monoton steigend in $[1,a]$ und $f(a) < a$. Hieraus folgt die Behauptung.

2. f ist Kontraktion:
$|f(x) - f(y)| = |x + \frac{a-x^4}{a^4} - y - \frac{a-y^4}{a^4}| = |x - y + \frac{y^4-x^4}{a^4}| = |(x-y) + \frac{(y-x)(y+x)(y^2+x^2)}{a^4}| =$
$|x-y| \cdot |1 - \left(\frac{(y+x)(y^2+x^2)}{a^4}\right)|$

Es gilt: $1 - \frac{4}{a} = 1 - \left(\frac{(a+a)(a^2+a^2)}{a^4}\right) \leq 1 - \left(\frac{(y+x)(y^2+x^2)}{a^4}\right) \leq 1 - \left(\frac{(1+1)(1^2+1^2)}{a^4}\right) = 1 - \frac{4}{a^4}$
Also ist f Kontraktion mit $q = \max\{|1 - \frac{4}{a}|, |1 - \frac{4}{a^4}|\} < 1$ für $a > 2$.

Die Voraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz sind also erfüllt.

Bemerkung: Für $a \to \infty$ konvergiert q gegen 1, d. h. je größer a wird, desto geringer ist die Kontraktion der Abbildung.

3. Wieviele Iterationen braucht man mindestens für ein vorgegebenes a, um die vierte Wurzel von a bis auf einen Fehler kleiner als 10^{-4} zu berechnen?

Iteration: $x_0 := 1$ und $f(x_n) := x_{n-1}$
$x_1 = f(1) = 1 + \frac{a-1}{a^4}$

Fehler: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a^{1/4} - x_n| \leq |x_1 - x_0| \left(\frac{q^n}{1-q}\right)$
D. h. Je geringer die Kontraktion ist (q nahe 1), desto schlechter ist die Kontrolle über

den Fehler.

$$|x_1 - x_0| \left(\frac{q^n}{1-q}\right) = \left(\frac{a-1}{a^4}\right)\left(\frac{q^n}{1-q}\right)$$

$$\left(\frac{a-1}{a^4}\right)\left(\frac{q^n}{1-q}\right) < 10^{-4} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{(1-q)a^4}{a-1}10^{-4}\right)}{\ln q}$$

Aufgabe 44:
Newtonverfahren:
gesucht: $d > 0$, so daß für alle $x \in I := [a^{1/4} - d, a^{1/4} + d]$ das Newtonverfahren anwendbar ist.

$$m := \inf_{x \in I} |f'(x)| = \inf_{x \in I} |4x^3| = 4(a^{1/4} - d)^3$$

$$M := \sup_{x \in I} |f''(x)| = \sup_{x \in I} |12x^2| = \sup_{x \in I} 12(a^{1/4} + d)^2$$

(oE. $a^{1/4} - d > 0$)

$$\frac{M}{2m} d < 1 \Leftrightarrow \frac{12(a^{1/4} + d)^2}{4(a^{1/4} - d)^3} d < 1$$

Nimm z. B. $d = 1/10$, dann gilt:

$$\frac{3(\frac{11}{10}a^{1/4})^2}{2(\frac{9}{10}a^{1/4})} \frac{1}{10} a^{1/4} = \frac{121}{2 \cdot 243} < 1$$

Fehler: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|x_n - a^{1/4}| \leq \frac{2m}{M} q^{2^n} = \frac{3^5}{5 \cdot 11^2} \cdot a^{1/4} \cdot \left(\frac{121^2}{4 \cdot 243^2}\right)^n$$

$$\frac{3^5}{5 \cdot 11^2} \cdot a^{1/4} \cdot \left(\frac{121^2}{4 \cdot 243^2}\right)^n < 10^{-8} \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{10^{-8} \cdot 5 \cdot 11^2}{a^{1/4} \cdot 3^5}\right)}{\ln\left(\frac{121^2}{4 \cdot 243^2}\right)} \Leftarrow n > 7 + 0,4 \cdot \ln a$$

Nach höchstens $7 + 0,4 \cdot \ln a$ Schritten, hat man die vierte Wurzel aus a mit dem Newtonverfahren bis auf einen Fehler von 10^{-8} berechnet. Hier sieht man nochmal, je größer a wird, desto mehr Schritte werden i.a. nötig sein.

Zu zeigen bleibt noch, daß das Newtonverfahren für alle Startwerte aus $(0, \infty)$ konvergiert:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - a}{4x_x^3} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{a}{x_n^3}\right)$$

1. *Behauptung*: $x_n \geq a^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x_{n+1} \geq a^{\frac{1}{4}}$:

$$x_{n+1} - a^{\frac{1}{4}} \geq 0 \Leftrightarrow x_n - a^{\frac{1}{4}} \geq \frac{x_n^4 - a}{4x_n^3} \Leftrightarrow x_n^4 - a \leq 4x_n^3(x_n - a^{\frac{1}{4}})$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen des Mittelwertsatzes und $x_n \geq a^{\frac{1}{4}}$: Es existiert ein $\xi \in (a^{\frac{1}{4}}, x_n)$, so daß gilt: $x_n^4 - a = 4\xi^3(x_n - a^{\frac{1}{4}})$
Da $\xi \leq x_n$ gilt, folgt $x_n^4 - a \leq 4x_n^3(x_n - a^{\frac{1}{4}})$

2. *Behauptung*: x_n ist monoton fallend für $n \geq 1$ für beliebige Startwerte $x_0 \in (0, \infty)$:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^4 - a}{4x_n^3} = \frac{1}{4}x_n - \frac{a}{4x_n^3}$$

$$x_n - x_{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow x_n \geq a^{\frac{1}{4}}$$

Fall 1: $x_0 \geq a^{\frac{1}{4}}$: Nach 1. ist (x_n) monoton fallend für alle $n \geq 0$.
Fall 2: $x_0 < a^{\frac{1}{4}}$, dann folgt: $x_1 \geq a^{\frac{1}{4}}$. Denn:

$$x_1 - a^{\frac{1}{4}} \geq 0 \Leftrightarrow x_1 - a^{\frac{1}{4}} \geq \frac{x_0^4 - a}{4x_0^3} \Leftrightarrow a - x_0^4 \geq 4x_0^3(a^{\frac{1}{4}} - x_0)$$

Die letzte Ungleichung gilt wieder wegen des Mittelwertsatzes und $x_0 < a^{\frac{1}{4}}$: Es existiert ein $\xi \in (x_0, a^{\frac{1}{4}})$ mit: $a - x_0^4 = 4\xi_0^3(a^{\frac{1}{4}} - x_0)$
Da $\xi \geq x_0$ gilt, folgt $a - x_0^4 \geq 4x_0^3(a^{\frac{1}{4}} - x_0)$.
Nach 1. ist (x_n) für $n \geq 1$ monoton fallend.

3. *Behaupung*: (x_n) konvergiert gegen $a^{\frac{1}{4}}$:
$(x_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend und durch $a^{\frac{1}{4}}$ nach unten beschränkt $\Rightarrow$ (x_n) konvergiert gegen einen Grenzwert x.
Zeige: $x = a^{\frac{1}{4}}$.
Es gilt: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - a}{4x_n^3}$ und $x_{n+1} \to x$ und $x_n \to x$.
Mit den Grenzwertsätzen folgt hieraus: $x = x - \frac{x^4 - a}{4x^3}$, also $x^4 = a$, falls $x \neq 0$.
Der Fall $x = 0$ kann nicht eintreten, da stets gilt $x_n \geq a^{\frac{1}{4}}$.

Aufgabe 45:

Lagrangsche Multiplikatoren:
Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^4), f(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ und $S = \{x : f(x) = 1, x_1 > 0\}$

$$\text{Minimiere } d\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right)^2 = (x_1 - t)^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \text{ bei } (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in S$$

Vorüberlegungen:

1. Da $S \neq \emptyset$ und da S abgeschlossen ist ($|x_1| \geq 1!$) und die Abbildung $S \ni (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mapsto d\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right)^2$ eine koerzive Funktion ist, wird der minimale Abstand angenommen.

2. Ist $(b, x_2, x_3 x_4)$ eine Minimalstelle mit $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \neq 0$, dann ist auch (b, y_2, y_3, y_4) mit $y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ auch eine Minimalstelle. Dann gibt es keinen eindeutigen nächsten Punkt.

Definiere Hilfsfunktion h:

$$h((x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda)^T) := (x_1 - t)^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - \lambda(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - 1)$$

Ableiten liefert folgendes Gleichungssystem, welches die notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Extremums beeinhaltet:

$$\operatorname{grad} h((x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda)^T) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - t) & - & 2\lambda x_1 \\ 2x_2 & + & 2\lambda x_2 \\ 2x_3 & + & 2\lambda x_3 \\ 2x_4 & + & 2\lambda x_4 \\ -x_1^2 + x_2^2 + & x_3^2 + & x_4^2 + 1 \end{pmatrix} = 0$$

Der quadratische Abstand $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ist nach der Nebenbedingung gleich $2x_1^2 - 1$.

1.Fall: $x_2 \neq 0$: Dann folgt aus $2x_2 = -2\lambda x_2$, daß $\lambda = -1$
und aus $2(x_1 - t) + 2x_1 = 0$ folgt, daß $x_1 = \frac{t}{2}$.

Somit gilt: $-\frac{t^2}{4} + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{t^2}{4} - 1$
Da $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 > 0$ gilt, gibt es für $-2 \leq t \leq 2$ keine Lösung.
Die übrigen Gleichungen tragen zur Lösung nichts bei.
Die Kandidaten für die nächsten Punkte auf S sind demnach Punkte aus der folgenden Menge für $t \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$:

$$\left\{ (\frac{t}{2}, x_2, x_3, x_4)^T : x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{t^2}{4} - 1, x_2 \neq 0 \right\}$$

Der quadratische Abstand ist: $d_1^2 = (\frac{t}{2} - t)^2 + \frac{t^2}{4} - 1 = \frac{t^2}{2} - 1 > 0$, für $|t| > 2$

2.Fall: $x_2 = 0$ und $x_3 \neq 0$. Eine ähnliche Rechnung führt auf folgende Menge der Kandidaten für die nächsten Punkte für $t \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$:

$$\left\{ (\frac{t}{2}, 0, x_3, x_4)^T : x_3^2 + x_4^2 = \frac{t^2}{4} - 1, x_3 \neq 0 \right\}$$

Der Abstand bleibt derselbe wie in Fall 1.

3.Fall: $x_2 = 0, x_3 = 0$ und $x_4 \neq 0$. Die Menge der Kandidaten für die nächsten Punkte für $t \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ ist dann:

$$\left\{ (\frac{t}{2}, 0, 0, x_4)^T : x_4^2 = \frac{t^2}{4} - 1, x_4 \neq 0 \right\}$$

Der Abstand bleibt derselbe wie in Fall 1.

Der 1., 2. und 3. Fall lassen sich wie folgt zusammenfassen: $x_2 \neq 0$ oder $x_3 \neq 0$ oder $x_4 \neq 0 \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \neq 0$. Für $|t| \leq 2$ gibt es in diesem Fall keine Lösung. Für $|t| > 2$ ist die Menge für die Kandidaten für die nächsten Punkte:

$$\left\{ (\frac{t}{2}, x_2, x_3, x_4)^T : x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{t^2}{4} - 1 \right\}$$

und der quadratische Abstand ist dann:

$$d_1^2 = \frac{t^2}{2} - 1.$$

4.Fall: $x_2 = 0, x_3 = 0$ und $x_4 = 0$. Dann gilt $x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$. Wegen der Nebenbedingung $x_1 > 0$ kommt nur $x_1 = 1$ als Lösung in Frage.
In diesem Fall ist also $(1, 0, 0, 0)^T$ der nächste Punkt. Der quadratische Abstand zu $(t, 0, 0, 0)^T$ ist dann: $d_2^2 = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$.

Nun müssen wir noch schauen, welcher der beiden Abstände d_1 bzw. d_2 der kleinere ist (in Abhängigkeit von $t, |t| > 2$; Für $|t| \leq 2$ existiert nur die Lösung d_2).

$$t^2 - 2t + 1 > \frac{t^2}{2} - 1 \Leftrightarrow t > 2$$

Also im Fall $t > 2$ ist der quadratische Abstand von $(t, 0, 0, 0)$ zu S: $\frac{t^2}{2} - 1$ und die Menge der nächsten Punkte ist:

$$\left\{ t/2, x_2, x_3, x_4)^T : x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{t^2}{4} - 1, t > 2 \right\}$$

Und im Fall $t \leq -2$ oder $-2 \leq t \leq 2$ ist der quadratische Abstand $(t-1)^2$ und der nächste Punkt in S ist $(1, 0, 0, 0)^T$.

Aufgabe 46:

Nullmengen: a) siehe nächstes Übungsblatt
b) 1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Abzählung von $\mathbb{Q}$.
Definiere Quader $Q_n := [x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}]$. Es gilt:

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \text{ und } \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(Q_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist eine Borelmenge:

Die Menge der Borelmengen in $\mathbb{R}$ ist die durch alle offenen Mengen in $\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra. Also sind alle offenen Mengen Borelmengen, alle Komplemente von diesen sind Borelmengen (also alle abgeschlossenen Mengen) und abzählbare Vereinigungen.
Einpunktige Mengen sind abgeschlossen, also Borelmengen. $\mathbb{Q}$ ist als abzählbare Vereinigung von einpunktigen Mengen eine Borelmenge.