



Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 12 Abgabe 8.07.02

47. **Volumen von Rechtecken.** Es seien $a_j < b_j$ für $1 \leq j \leq n$ und

$$R_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j < x < b_j \text{ für } 1 \leq j \leq n\}$$

sowie $R_2 = \overline{R_1}$. Man zeige:

$$\lambda^n(R_1) = \lambda^n(R_2) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

48. **Hyperebenen sind Nullmengen.** Die Hyperebene $H_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ ist für $a \in \mathbb{R}^n$ mit $|a| = 1$ und $b \in \mathbb{R}$ durch

$$H_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = b\}$$

definiert. Man zeige:

1. $H_{e_j,0}$ ist eine Nullmenge für $1 \leq j \leq n$.
2. $H_{a,b}$ ist eine Nullmenge für $|a| = 1$ und $b \in \mathbb{R}$.

49. Man zeige:

1. Jede Nullmenge ist auch eine Lebesguemenge.
2. Es gibt Nullmengen, die keine Borelmengen sind.

Hinweis: Es sei $K \subset [0, 1]$ die in der Einführung zur Integration definierte Menge. Man betrachte $K \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$.

50. Man zeige: Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.