UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 13
Abgabe 15.07.02

51. **Integralberechnungen.** Man berechne das Lebesguemaß des Simplex

$$\Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^n | x_j \geq 0 \text{ für } 1 \leq j \leq n \text{ und } \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1\}$$

Hinweis: Fubini!
52. Man berechne

$$\int_0^1 \int_x^1 y^2 \sin \frac{2\pi x}{y} \, dy \, dx$$

Hinweis: Fubini!
53. **Integrale über Gauss'sche Funktionen.** Es sei $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), f_n(x) = e^{-\sum_{j=1}^n x_j^2}$. Man zeige:

1. f_n is meßbar.
2. Das Integral $I_n = \int f_n d\lambda^n$ ist endlich.
3. Es gilt $I_n = I_1^n$.

Hinweis: Fubini!
54. **Schwerpunkte.** Die j-te Koordinate des Schwerpunktes der beschränkten Lebesguemenge A mit $\lambda^n(A) > 0$ ist durch

$$(\lambda^n(A))^{-1} \int_A x_j d\lambda^n$$

gegeben. Man berechne die Schwerpunkte

1. Der Kugel $K_1(0)$.
2. Des Kegels
$$\{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 > 0, x_1^2 + x_2^2 \leq (1 - x_3)^2\}$$

Hinweis: Fubini!
55. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

1. Jede beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar.
2. Jede Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist Lebesgue-integrierbar.
3. Für jede beschränkte Funktion f ist $\chi_{K_1(0)} f$ Lebesgue-integrierbar.
4. Für jede Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist $\chi_{K_1(0)} f$ Lebesgue-integrierbar.
5. Sei A Borelmenge. Dann sind die Schnitte Lebesguemengen.

Begründung!