Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

3. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2002

Abgabetermin: Montag, 13.5.02, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 11: Zeigen Sie (etwa durch Differentiation nach x), daß für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|xy| < 1$ gilt:

$$\arctan x + \arctan y \;=\; \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

Folgern Sie daraus, daß $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$ ist.

Aufgabe 12 (∗): Es sei f eine auf $[0, \infty)$ integrierbare Funktion, so daß $\int_0^{\uparrow\infty} f(x)dx$ konvergiert. Folgt dann $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$? Ist f beschränkt? Ändert sich etwas, wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, \infty)$ vorausgesetzt wird?

Aufgabe 13: Entscheiden Sie, ob folgende uneigentliche Integrale konvergieren.

a) $\displaystyle\int_{1\downarrow}^{2} \frac{dx}{\log x}$ **b)** $\displaystyle\int_{1}^{\uparrow\infty} \sin^2 \frac{1}{x}\, dx$ **c)** $\displaystyle\int_{0}^{\uparrow\infty} \sin(x^2)\, dx$ **d)** $\displaystyle\int_{0}^{\uparrow\infty} x^2 e^{-x}\, dx$

Aufgabe 14: Es sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Untersuchen Sie, ob aus einem der beiden folgenden Kriterien die Konvergenz von (a_n) folgt.

a) $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq n_0 \colon |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$

b) (a_n) ist beschränkt und erfüllt die Bedingung aus Teil a).

Aufgabe 15:

a) Berechnen Sie $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ für die Folge (a_n) definiert durch

$$a_n \;:=\; \frac{n + (-1)^n(2n+1)}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ besitze genau einen Häufungswert $h \in \mathbb{R}$. Folgt daraus die Konvergenz von (a_n)? Man beantworte diese Frage auch für *beschränkte* Folgen (a_n)!