Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

4. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2002

Abgabetermin: Dienstag, 21.5.02, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 16: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$ **b)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}$ **c)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ **d)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^3}$ **e)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}$ **f)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$

Aufgabe 17 (*): Eine Folge $(a_k) \subset \mathbb{R}$ heißt *schnell fallend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Folge $(k^n a_k)$ beschränkt ist.

a) Zeigen Sie, daß die folgende Bedingung äquivalent zur Definition ist:
$\sum_{k=1}^{\infty} k^n |a_k| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

b) Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$. Zeigen Sie, daß die Folge $(a_k) := (q^k)$ schnell fallend ist.

Aufgabe 18: Es sei (a_k) eine Folge positiver reeller Zahlen, und $\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$ sei eine beschränkte Folge.

a) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\liminf \frac{a_{k+1}}{a_k} \;\leq\; \liminf \sqrt[k]{a_k} \;\leq\; \limsup \sqrt[k]{a_k} \;\leq\; \limsup \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Was folgt für den Anwendungsbereich von Wurzel- und Quotientenkriterium?

b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$ für $x > 0$ auf Konvergenz.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Teile a) und b), daß gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} \;=\; e$$

Aufgabe 19: Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(1+x^2)^{k+1}}$ **b)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1+x^{4k}}$

Aufgabe 20: Es sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, daß $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß f die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$f(x+y) \;=\; f(x)\cdot f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$