Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

5. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2002

Abgabetermin: Montag, 27.5.02, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 21: $f_n, g_n, h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, \qquad g_n(x) := e^{-nx^2}, \qquad h_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n}+x^2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen die Funktionenfolgen (f_n), (g_n), (h_n) jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 22: Definiere $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch $f_n(x) := \frac{x}{1+nx^2}$.

a) Zeigen Sie, daß $(f_n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

b) Zeigen Sie, daß (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ konvergiert.

c) Zeigen Sie, daß (f_n') nicht gegen f' konvergiert.

Aufgabe 23 (∗): Es sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, daß für jede Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ gilt: $L_Z(f) \leq b-a+f(b)-f(a)$

b) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $L(f_n) \leq 2$

c) Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{n\to\infty} L(f_n) = 2$ ist, indem Sie $L(f_n)$ nach unten durch die Länge des Streckenzugs durch die Punkte $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \frac{1}{n})$, $(1,1)$ abschätzen.

Aufgabe 24: Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(I)$ und $f \in \mathcal{C}(I)$. Für die Aussagen

(A) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f

(B) Für jede Folge $(x_n) \subseteq I$ und $x \in I$ gilt: $x_n \to x \;\Rightarrow\; f_n(x_n) \to f(x)$

zeige man $(A) \Rightarrow (B)$, für kompakte Intervalle I auch die Umkehrung.

Aufgabe 25: Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen, und geben sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, für die die Reihe (absolut) konvergiert.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k \cdot 7^k}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k+e^{-k}}{2} x^k$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{3k}$