Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

6. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2002

Abgabetermin: Montag, 3.6.02, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 26: a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ für $\alpha > 1$ auf $\mathbb{R}$ normal konvergiert.

b) Es sei $f : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ und $m \in \mathbb{N}$. Für welche α gilt $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$?

Aufgabe 27: a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ auf jedem Intervall $[c, \infty)$ mit $c > 1$ normal konvergent ist.

b) Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ auf $(1, \infty)$ gleichmäßig konvergiert.

c) Zeigen Sie, daß die Funktion $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ in $\mathcal{C}^\infty(1, \infty)$ liegt.

Aufgabe 28 (∗): Es sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ in eine Potenzreihe um a entwickelbar. Es gebe eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}\setminus\{a\}$ mit $x_n \to a$ und $f(x_n) = 0$ ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß gilt: $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $f(x) \equiv 0$ (Hinweis: vollständige Induktion)

Aufgabe 29: Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in \mathcal{C}^m(I)$. Was kann man aus $f^{(m)}(x) \equiv 0$ schließen?

Aufgabe 30: Es sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vom Grad 3 zu f in $a = 0$.

b) Zeigen Sie, daß

$$\left| \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{157}{128} \right| < \frac{1}{400}$$

gilt, indem Sie die Integralform des Restgliedes geeignet abschätzen.