Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

9. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2002

Abgabetermin: Montag, 24.6.02, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 41: Es seien X ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen gelten.

a) $M^\circ = \overline{M^c}^c$

b) M° ist offen.

c) M° umfaßt jede in M enthaltene offene Menge.

Aufgabe 42: Es seien X ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Beweisen Sie, daß $\overline{M}$ die disjunkte Vereinigung der Menge der Häufungspunkte und der Menge der isolierten Punkte von M ist.

Aufgabe 43: Für eine Teilmenge J eines metrischen Raumes X bezeichne $\Delta(J) := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in J\} \in [0,\infty]$ den *Durchmesser* von J. Beweisen Sie, daß X genau dann vollständig ist, wenn das folgende *Intervallschachtelungsprinzip* gilt:
Es sei $(J_n) \subseteq X$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit $J_n \supseteq J_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\Delta(J_n) \to 0$. Dann existiert $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$.

Aufgabe 44: Es seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß f genau dann gleichmäßig stetig ist, falls für zwei Folgen $(x_n), (y_n) \subseteq X$ stets gilt: $d(x_n, y_n) \to 0 \;\Rightarrow\; d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$

Aufgabe 45 (∗): Im folgenden bezeichne $\mathbb{Q}[x]$ die Polynome in x mit rationalen Koeffizienten und $\mathbb{Q}_m[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$ die Polynome vom Grad $\leq m$ für $m \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}_m[x]$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ abzählbar ist.

b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}[x]$ abzählbar ist.

c) Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, wenn es ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad $m \geq 1$ gibt, so daß $P(\alpha) = 0$ gilt. Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen abzählbar ist.
(Hinweis: Ist $P \in \mathbb{Q}[x]$, so existiert ein Surjektion ν_P von $\mathbb{N}$ auf die Menge der Nullstellen von P. Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{Q}[x] \times \mathbb{N} \to \mathbb{A}$ definiert durch $f(P, n) := \nu_P(n)$.)