Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

10. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2002

Abgabetermin: Montag, 1.7.02, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 46: Es seien X ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ kompakt. Zeigen Sie, daß gilt:

a) $A \cap B$ ist kompakt.

b) $A \cup B$ ist kompakt.

Aufgabe 47: Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für Teilmengen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$.

a) A offen $\Rightarrow$ $f(A)$ offen

b) B offen $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ offen

c) A abgeschlossen $\Rightarrow$ $f(A)$ abgeschlossen

d) B abgeschlossen $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ abgeschlossen

e) A kompakt $\Rightarrow$ $f(A)$ kompakt

f) B kompakt $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ kompakt

g) A wegzusammenhängend $\Rightarrow$ $f(A)$ wegzusammenhängend

h) B wegzusammenhängend $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ wegzusammenhängend

Aufgabe 48 (∗): Es sei X ein metrischer Raum. Die *Distanz* zweier Mengen $A, B \subseteq X$ wird erklärt durch:

$$d(A, B) \ := \ \inf\{d(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

a) Es seien A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, daß $d(A, B) > 0$ gilt.

b) Finden Sie abgeschlossene, disjunkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $d(A, B) = 0$.

Aufgabe 49: Gegeben seien paarweise verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_r \in [a, b]$ sowie Zahlen $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Norm von $\sum_{k=1}^{r} c_k \delta_{x_k} \in (\mathcal{C}[a, b])'$.