Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

11. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2002

Abgabetermin: Montag, 8.7.02, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 50: Es seien $A := \{(0,0)\}$, $B := \{(x, \cos\frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$ und $M := A \cup B$ Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, daß A und B die Wegekomponenten von M sind.

b) Zeigen Sie, daß M zusammenhängend ist.

c) Überprüfen Sie, ob A und B offen oder abgeschlossen in M sind.

Aufgabe 51 (∗): Zur Zeit $t = 0$ seien die Kreislinie $S_0 := S_1(0,1)$, der Kreismittelpunkt $M(0) := (0,1)$ und der Randpunkt $R(0) := (0,0)$ gegeben. Rollt die Kreislinie nun über die x-Achse (mit Geschwindigkeit 1), so hat man zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ entsprechende Mittelpunkte $M(t)$ und Randpunkte $R(t)$. Für festes $b > 0$ sei $\gamma_b(t) := M(t) + b(R(t) - M(t))$; γ_b beschreibt dann eine *Zykloide*.

a) Beweisen Sie die Formel $\gamma_b(t) = (t - b\sin t, 1 - b\cos t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie die Weglänge von γ_1 zwischen 0 und 2π.

Aufgabe 52: Berechnen Sie folgende komplexe Zahlen.

a) $\frac{1}{2+i}$ **b)** $\left(\frac{2+3i}{1-2i} + \frac{i}{3+i}\right)^{-1}$ **c)** $(1 + i\sqrt{3})^6$

Aufgabe 53: Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz.

a) $\left(\frac{i^n}{1+ni}\right)$ **b)** $\left(\frac{e^{2n}}{(3+4i)^n}\right)$ **c)** $\left(\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n\right)$ für Nullfolgen $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$

Aufgabe 54: Zeigen Sie, daß die auf ganz $\mathbb{C}$ definierten Funktionen Sinus und Kosinus nur reelle Nullstellen haben.