Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

12. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II", SS 2002

Abgabetermin: Montag, 15.7.02, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 55: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x\sin(yz^2)$. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f.

Aufgabe 56 ($*$): Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein *Zeitintervall* und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein *Raumgebiet*; Punkte aus $D \times I \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ werden mit (x,t) bezeichnet, und es sei $r = |x|$. Die partielle Differentialgleichung

$$\Delta_x f - \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial t} \;=\; 0$$

heißt *Wärmeleitungsgleichung* ($k > 0$ ist die Temperaturleitfähigkeit). Zeigen Sie, daß

$$T(x,t) \;:=\; t^{-n/2}\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

eine bezüglich der Raumvariablen rotationssymmetrische Lösung auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ ist. Was passiert für $t \to 0$?
(Hinweis: Verwenden Sie die Formel für $\Delta(f \circ r)$ aus Beispiel 19.11 der Vorlesung.)

Aufgabe 57: Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$. (Hinweis: partielle Integration)

Aufgabe 58: Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f,g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ total differenzierbar. Zeigen Sie, daß dann auch $f \cdot g$ in a total differenzierbar ist, und geben Sie die Produktregel an.

Aufgabe 59: Definiere eine Funktion $f : \mathbb{M}(n) \to \mathbb{M}(n)$ durch $f(A) := A^3$. Berechnen Sie die Ableitung von f.