Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. Birgit Jacob

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

1. Übungsblatt zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen SS 2002

Aufgabe 1
Es seien $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f, g \in C(J, \mathbb{R})$ und $(x_0, y_0) \in I \times (0, \infty)$.
Für festes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und $x \in C^1\big(I, (0, \infty)\big)$ sei $z := x^{1-\alpha}$.
Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) x ist in I Lösung von $\dot{x} = f(t)\, x + g(t)\, x^\alpha,\ x(t_0) = x_0$.

(ii) z ist in I Lösung von $\dot{z} = (1 - \alpha)\big[f(t)\, z + g(t)\big],\ z(t_0) = x_0^{1-\alpha}$.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie alle Lösungen von

1. $\dot{x} = tx - e^{-t^2} x^3$
2. $\dot{x} = -\dfrac{3}{t} x + tx^2\,, \qquad x(2) = \dfrac{1}{12}\,.$

Aufgabe 3

1. Finden Sie möglichst viele Lösungen der Differentialgleichungen

   (a) $y' \;=\; 4x\sqrt{|y|},$

   (b) $y' \;=\; \begin{cases} y(\ln|y|)^2 & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases},$

   Skizzieren Sie die Lösungen.

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$y' \;=\; y^2\, x^2, \qquad y(1) = 1.$$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie alle diffenzierbaren Lösungen der Funktionalgleichung
$$h(x + y) = h(x)h(y).$$

Tipp: Betrachten Sie zunächst x als fest und leiten Sie einen Ausdruck für $h'(x)$ her. Lösen Sie dann die entstehende Differentialgleichung.

Abgabe Montag, den 22.04.2002, 10.00 Uhr