

4. Übungsblatt zu Gewöhnliche Differentialgleichungen, SS 2002

Aufgabe 13

1. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f, g, h \in C(I, \mathbb{R})$. Dann heißt

$$y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$$

Riccati-Differentialgleichung.

Zeigen Sie: Ist v eine bekannte Lösung der Riccati-Differentialgleichung und ist y eine weitere Lösung, so erfüllt die Differenz $u := y - v$ die Bernoulli-Differentialgleichung

$$u' + [f(x) + 2v(x)g(x)]u + g(x)u^2 = 0.$$

2. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y' + (2x + 3)y - y^2 = x^2 + 3x + 3.$

Tipp: Es gibt eine Lösung der Form $v = ax + b.$

(b) $y' - \frac{3}{x}y + y^2 = \frac{3}{x^2}.$

Aufgabe 14 Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

1. $\ddot{x} - 10\dot{x} + 16x = e^{iat}.$
2. $\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = (t + 1)e^{iat}.$

Aufgabe 15

1. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $b \in C(I, \mathbb{R})$ und $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Eulersche Differentialgleichung

$$t^2\ddot{x}(t) + a_1t\dot{x}(t) + a_0x(t) = b(t), \quad t > 0,$$

durch die Substitution $t = e^y$ auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten transformiert wird.

2. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$t^2\ddot{x}(t) - 3t\dot{x}(t) + 7x(t) = 0.$$

Abgabe Montag, den 13.05.2002, 10:00 Uhr