Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. Birgit Jacob

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

5. Übungsblatt zu Gewöhnliche Differentialgleichungen, SS 2002

Aufgabe 16 Schreiben Sie das AWP $\dot{x} = (x - t + 1)$, $x(0) = 0$ auf eine Integralgleichung um und führen Sie vier Schritte der Picard-Iteration durch.

Aufgabe 17

Es sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(t,x) := \begin{cases} 2t & , \quad x \leq 0\,, \\ -2t & , \quad x \geq t^2\,, \\ 2t - \dfrac{4x}{t} & , \quad 0 < x < t^2\,. \end{cases}$

i) Zeigen Sie, dass f stetig, aber bezüglich x nicht lokal Lipschitz–stetig ist.

ii) Zeigen Sie, dass die Folge der Picard–Iterierten des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(t,x)$, $x(0) = 0$, ausgehend von $\varphi_0(t) := 0$ $(t \in [0,1])$, zwei Häufungswerte besitzt, von denen keiner eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

iii) Finden Sie eine Lösung des obigen Anfangswertproblems. Gibt es weitere Lösungen?

Aufgabe 18
Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(t+1)\ddot{x} + t\dot{x} - x = 0\,.$$

Aufgabe 19
Beweisen Sie die folgende Variante des Satzes von Picard-Lindelöf:
Es seien $J \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\tau \in J$, $\xi \in \mathbb{K}^n$, und für ein $L > 0$ erfülle $f \in \mathcal{C}(J \times \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ die Lipschitz-Bedingung

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad \text{für } t \in J, x_1, x_2 \in \mathbb{K}^n.$$

Dann hat das AWP $\dot{x} = f(t,x)$, $x(\tau) = \xi$ genau eine Lösung $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{K}^n)$.
Tipp: Verwenden Sie auf $\mathcal{C}(J, \mathbb{K}^n)$ die äquivalente Norm

$$\|\varphi\|_L := \sup_{t \in J} \|\varphi(t)\| e^{-2L|t-\tau|}.$$

Abgabe Montag, den 20.05.2002, 10:00 Uhr