Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. Birgit Jacob

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

6. Übungsblatt zu Gewöhnliche Differentialgleichungen, SS 2002

Aufgabe 20 (Verallgemeinertes Lemma von Gronwall)

Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g, h \in C(I)$ mit $g, h \geq 0$ auf I sowie $\alpha \geq 0$ und $\tau \in I$. Gilt für alle $t \in I$

$$g(t) \leq \alpha + \left| \int_\tau^t h(s)g(s)\, ds \right| ,$$

so folgt für alle $t \in I$:

$$g(t) \leq \alpha \ \exp\left(\left| \int_\tau^t h(s)\, ds \right| \right) .$$

Aufgabe 21

Bestimmen Sie die Lösungen des folgenden autonomen Systems für $\alpha \geq 0$ und skizzieren Sie die Lösungskurven.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - \alpha x \sqrt{x^2 + y^2}\,, \\ \dot{y} &= \quad x - \alpha y \sqrt{x^2 + y^2}\,. \end{aligned}$$

Tipp: Transformieren Sie auf Polarkoordinaten: $x(t) = r(t)\, \cos\varphi(t)$, $y(t) = r(t)\, \sin\varphi(t)$, und lösen Sie das entsprechende System für r und φ.

Aufgabe 22

Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $\Gamma \subset D$ eine offene Jordankurve (d. h. homöomorphes Bild eines offenen Intervalls) mit $f(x) \neq 0$ auf Γ. Weiter sei $\varphi : I^* \mapsto D$ eine maximale Lösung des autonomen Systems $\dot{x} = f(x)$ mit $\varphi(I^*) \subset \Gamma$. Zeigen Sie: $\varphi(I^*) = \Gamma$.

Klausur

Die Klausur findet am 18. Juli 2002 von 16.15 - 19.15 Uhr in E 28 statt.
Zur Klausur sind (außer Schreibzeug) keine zusätzlichen Hilfsmittel zugelassen.
Die Anmeldung findet Anfang Juli statt.

Abgabe Montag, den 27.05.2002, 10:00 Uhr