Prof. Dr. W. Kaballo Fachbereich Mathematik
Dr. Birgit Jacob Universität Dortmund

7. Übungsblatt zu Gewöhnliche Differentialgleichungen, SS 2002

Aufgabe 23
Gegeben sei das AWP $\dot{x} = -\frac{1}{t}x, \; x(1) = 1$. Ermitteln Sie $x(2)$ und je eine Näherung für $x(2)$ mit dem Eulersches Polygonzugverfahren

(i) mit $h = 1$ (ein Schritt),

(ii) mit $h = \frac{1}{2}$ (zwei Schritte),

(iii) mit $h = \frac{1}{4}$ (vier Schritte).

Aufgabe 24
Gegeben sei $S = [0,1] \times \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(S, \mathbb{R})$ und das AWP

$$\ddot{x} = f(t,x), \qquad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = b.$$

Zeigen Sie, dass x genau dann Lösung des AWP ist, wenn x stetige Lösung der folgenden **Volterra-Integralgleichung** ist:

$$x(t) = a + bt + \int_0^t (t-s)\, f(s, x(s))\, ds$$

Aufgabe 25
Es seien X, Y metrische Räume. Wir nennen eine Funktionenmenge $M \subset \mathcal{C}(X,Y)$ *gleichstetig* falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x_1, x_2 \in X \, \forall g \in M : \; d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(g(x_1), g(x_2)) < \varepsilon.$$

Für eine Folge $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ existiere $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ gleichmäßig auf X. Zeigen Sie, dass mit $\{f_n\}$ auch die Menge $\{f_n\} \cup \{f\}$ gleichstetig ist.

Aufgabe 26
Es sei $D \subseteq \mathbb{K}^n$, $f \in \mathcal{C}([a,b] \times D, \mathbb{K}^n)$ und $\tau \in [a,b]$. Mit $L > 0$ genügt f der Lipschitz-Bedingung

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\| \quad \text{für } t \in [a,b], x_1, x_2 \in D.$$

Für jedes $\xi \in D$ möge die Lösung x_ξ des AWPs

$$\dot{x} = f(t,x), \; x(\tau) = \xi$$

auf $[a,b]$ existieren. Zeigen Sie, dass die Abbildung $D \to \mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty), \; \xi \to x_\xi$ Lipschitz-stetig ist.

Abgabe Montag, den 03.06.2002, 10:00 Uhr