Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. Birgit Jacob

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

10. Übungsblatt zu Gewöhnliche Differentialgleichungen, SS 2002

Aufgabe 34
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(i) $\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0$

(ii) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = 0$

(iii) $\ddot{x} + 2ix = 0$

(iv) $\ddot{x} + x = \frac{1}{\sin t}$

(v) $x^{(3)} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0$

(vi) $x^{(4)} + 2\ddot{x} + x = 0$

Geben Sie dabei, falls möglich, jeweils ein reelles Fundamentalsystem an.

Aufgabe 35
Sei L der folgende lineare Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten

$$L[x] := x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{x} + a_0x.$$

$P_L(\lambda)$ sei das charakteristische Polynom von L, $\alpha \in \mathbb{C}$ sei eine r-fache Nullstelle von P_L ($r = 0$, falls α keine Nullstelle ist).

Beweisen Sie: die Gleichung $L[x] = t^s e^{\alpha t}$ hat eine partikuläre Lösung der Form $u = p(t)e^{\alpha t}$, wobei p ein Polynom $s + r$-ten Grades ist.
Genauer gilt: p kann in der Form $p(t) = t^r p_1(t)$ gewählt werden, wobei s der Grad von p_1 ist.
Anleitung:

i) Es ist $L[e^{\mu t}] = P_L(\mu)e^{\mu t}$

ii) $P_L(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \alpha)^r$

iii) Für λ nahe bei α ist $L[\frac{1}{q(\lambda)}e^{\lambda t}] = (\lambda - \alpha)^r e^{\lambda t}$

iv) Differenzieren Sie die Formel aus (iii) $r + s$-mal nach λ. Dabei benutzt man sinnvollerweise die Leibniz'sche Regel $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}$.

v) Nehmen Sie den Limes für $\lambda \to \alpha$.

Aufgabe 36
Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes (vgl. Aufgabe 35) die allgemeine Lösung:

i) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^t$

ii) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^{-t}$

iii) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = te^t$

iv) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t^2$

Abgabe Montag, den 24.06.2002, 10:00 Uhr