Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. Birgit Jacob

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

11. Übungsblatt zu Gewöhnliche Differentialgleichungen, SS 2002

Aufgabe 38

Wir betrachten noch einmal die Systeme $\dot{x} = v_i(x)$ aus Aufgabe 37. Es galt $v_1(x,y) = (3-3x^2, -2y)$ und $v_2(x,y) = (3-3x^2, -4y^3)$.

i) Geben Sie für den Punkt $(1,0)$ je eine Ljapunovfunktion an.

ii) Skizzieren Sie den Verlauf der Lösungen.

Aufgabe 39

Seien $v_1(x,y) = (-y+x^3, x+y^3)$ und $v_2(x,y) = (-y-x^3, x-y^3)$ Vektorfelder.

i) Untersuchen Sie den kritischen Punkt $(0,0)$ von $\dot{x} = v_i(x)$ mit der Linearisierungsmethode.

ii) Geben Sie für den Punkt $(0,0)$ je eine Ljapunovfunktion an.

iii) Skizzieren Sie den Verlauf der Lösungen.

Aufgabe 40

Ein System ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r) \\ \dot{\varphi} &= \sin^2 \varphi/2 \end{aligned}$$

i) Skizzieren Sie die Lösungskurven.

ii) Zeigen Sie, dass der Punkt $(1,0)$ nicht stabil ist.

iii) Zeigen Sie weiter: Außer der stationären Lösung $(0,0)$ laufen alle Lösungen auf $(1,0)$ zu.

Aufgabe 41

Es sei $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $v(0) = 0$ und $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei eine Ljapunovfunktion zu dem kritischen Punkt 0 von v mit $\partial_v L(x) \leq 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $L(x) \to \infty$ für $\|x\| \to \infty$.

Zeigen Sie, dass jede Lösung von $\dot{x} = v(x)$ auf $[0,\infty)$ existiert und beschränkt ist.

Abgabe Montag, den 01.07.2002, 10:00 Uhr