Dr. B. Mühlherr / Dr. G. Skoruppa SS 2002

1. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 24.4.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

Wenn nichts anderes vereinbart ist, wird mit K stets ein Körper bezeichnet.

Aufgabe 1:

a) V sei ein 2-dimensionaler K-Vektorraum und $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von V. Die Abbildung $D : V^2 \to K$ sei gegeben durch

$$D(v_1, v_2) \;:=\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \text{mit } v_i = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2, i = 1, 2.$$

Zeigen Sie, daß D eine Volumenfunktion auf V ist.

b) Sei $\dim_K V = n$. Zeigen Sie: Die Menge der alternierenden n-Linearformen ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V^n, K)$. Welche Dimension hat dieser Untervektorraum?

Aufgabe 2:
Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit $A = -A^{\mathrm{T}}$ heißt *schiefsymmetrisch*. Zeigen Sie, daß für solche Matrizen im Falle von $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ (also $2 \cdot 1 \neq 0$) und ungeradem n gilt: $\det(A) = 0$.

Hinweis: In der Globalübung wird gezeigt, daß $\det(A) = \det(A^{\mathrm{T}})$ gilt. Dies dürfen Sie benutzen.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie durch Zurückführung auf die Leibnizregel für eine Matrix aus $K^{n\times n}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

b) Leiten Sie aus a) eine einfache Berechnungsformel für Determinanten von unteren Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

aus $K^{n\times n}$ und entsprechende obere Dreiecksmatrizen her.

(bitte wenden)

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie: Man kann 4 paarweise verschiedene Zahlen $a_1, \ldots, a_4 \in K$ stets so zu einer Matrix $A \in K^{2\times 2}$ anordnen, daß A regulär ist.

b)* Zeigen Sie, daß diese Aussage allgemeiner für n^2 statt 4 gilt: Für vorgegebene paarweise verschiedene Zahlen $a_1, \ldots, a_{n^2} \in K$ findet man stets eine Anordnung zu einer Matrix $A \in K^{n\times n}$, so daß A regulär ist.

Bemerkungen:

I.d.R. wird jedes Übungsblatt 4 Aufgaben enthalten. Die Bearbeitung einer Aufgabe wird mit bis zu 10 Punkten bewertet.

Aufgaben mit einem Sternchen *) laufen außer Konkurrenz, da sie schwieriger sind und sich vor allen Dingen an die Studenten des Studiengangs „Mathematik Dipl.“ richten. Sie werden i.d.R. nicht bepunktet, können aber im Ermessen des Übungsleiters zum Ausgleich von an anderen Stellen nicht erzielten Punkten herangezogen werden.

Literaturempfehlungen:

a) *G. Fischer:* Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger, Vieweg,

b) *K. Jänich:* Lineare Algebra, Springer,

c) *R. Walter:* Einführung in die lineare Algebra, Vieweg.