Dr. B. Mühlherr / Dr. G. Skoruppa SS 2002

# 2. Übungsblatt
# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 30.4.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

Unsere Übungszettel finden Sie demnächst auch unter
`http://fsmath.mathematik.uni-dortmund.de/aufgabenzettel` im Internet.

**Aufgabe 5:**
Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis eines $n$-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$ und $D : V^n \to K$ die Volumenfunktion mit $D(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Berechnen Sie (ohne Verwendung der Leibniz-Formel)

a) $D(v_1 + 2v_2 + 3v_3, 2v_1, -v_1 + 2v_2 + 3v_3)$ für $n = 3$

b) $D(v_2 + v_3, v_1 + v_3, v_1 + v_2)$ für $n = 3$

c) $D(v_1 + v, \ldots, v_n + v)$ für beliebiges $n$ und $v := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \in V$.

**Aufgabe 6:**
Sei $D$ eine alternierende $n$-Linearform auf dem $n$-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$ und $L \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, daß $\triangle \in \mathrm{Abb}(V^n, K)$ mit

$$\triangle(v_1, \ldots, v_n) \ := \ D(L(v_1), \ldots, L(v_n)) \qquad \text{für alle } v_1, \ldots, v_n \in V$$

eine alternierende $n$-Linearform ist.

**Aufgabe 7:**
Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum und $L \in \mathrm{End}(V)$. Beweisen Sie:

a) Es existiert genau ein $s \in K$, so daß für alle Volumenfunktionen $D : V^n \to K$ und alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} D(v_1, \ldots, v_{k-1}, L(v_k), v_{k+1}, \ldots, v_n) \ = \ s \cdot D(v_1, \ldots, v_n).$$

$s$ heißt *Spur* von $L$, geschrieben $\mathrm{spur}(L)$.

b) Die Abbildung $L \mapsto \mathrm{spur}(L)$ ist eine Linearform auf $\mathrm{End}(V)$.

c) Ist $A$ bezüglich einer Basis von $V$ Darstellungsmatrix von $L$ (mit den Komponenten $a_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$ ), so gilt:

$$\mathrm{spur}(L) \ = \ \sum_{k=1}^{n} a_{ii} \ =: \ \mathrm{spur}(A).$$

**Aufgabe 8:**
Die Menge $\mathrm{SL}(V)$ der Automorphismen $L$ eines $K$-Vektorraums $V$ mit $\det(L) = 1$ heißt *spezielle lineare Gruppe*:

$$\mathrm{SL}(V) \;:=\; \{L \in \mathrm{GL}(V) \mid \det(L) = 1\}.$$

Zeigen Sie: $\mathrm{SL}(V)$ ist ein Normalteiler in $\mathrm{GL}(V)$.

## Präsenzaufgaben

(Falls die Zeit es zuläßt, können diese Aufgaben in den Übungen besprochen werden. Sie sollten zum mündlichen Vortrag für die jeweils nächste Übung – hier also am 29.4.02 – vorbereitet werden. Schriftliche Abgaben hierzu werden nicht korrigiert oder gar bepunktet.)

**Aufgabe P1:**
Berechnen Sie im Falle von $\det(A) \neq 0$ für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mittels der Cramerschen Regel (vgl. Globalübung) die Inverse $A^{-1}$.

**Aufgabe P2:**
Wie lautet $\det(A)$ für $A \in K^{n\times n}$ mit den Koeffizienten $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$ (also auf der Hauptdiagonalen Nullen und sonst überall Einsen)?