Dr. B. Mühlherr / Dr. G. Skoruppa SS 2002

3. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 8.05.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

Unsere Übungszettel finden Sie auch unter
`http://fsmath.mathematik.uni-dortmund.de/aufgabenzettel` im Internet.

Wenn nichts anderes vereinbart ist, wird mit K stets ein Körper bezeichnet.

Aufgabe 9:
Sei $V := \{f \in K[t] \mid \mathrm{grad}(f) \leq 5\}$. Die lineare Abbildung $\varphi : K[t] \to K[t]$ sei definiert durch

$$\varphi(f) \quad := \quad \frac{d}{dt} f, \qquad f \in V$$

Für die Monome $t^n \in V$, $n \geq 1$ gilt also $\frac{d}{dt} t^n = nt^{n-1}$ bzw. $\frac{d}{dt} 1 = 0$.

a) Man bestimme für $K = \mathbf{R}$ alle φ-invarianten Unterräume von V.

b) Gibt es für $K = \mathbf{R}$ eine φ-invariante Zerlegung von V?

c)* Gibt es für $K = \mathbf{F}_3$ eine φ-invariante Zerlegung von V?

Aufgabe 10:
Seien $\lambda, \mu, \nu \in K$ paarweise verschieden. Man definiere mittels der Matrizen

$$D_1 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad D_2 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad D_3 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

aus $K^{3\times 3}$ die Abbildungen $\varphi_i \in \mathrm{End}(K^3)$, $i = 1, 2, 3$ durch $\varphi_i(v) := D_i \cdot v,\ v \in K^3$.

Bestimmen Sie für $i = 1, 2, 3$ alle φ_i-invarianten Unterräume von K^3.

Aufgabe 11:
Sei V ein K-Vektorraum und U ein Teilraum von V. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, so daß $\{v_1, \ldots, v_k\}$ eine Basis von U ist. Zeigen Sie:

a) $\{v_{k+1} + U, \ldots, v_n + U\}$ ist eine Basis von V/U.

b) Hat $v \in V$ die Basisdarstellung $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, so ist

$$v + U \quad = \quad \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i (v_i + U)$$

Aufgabe 12:
Seien $A, B, C, D, A', B', C', D'$ (vom Format her möglicherweise unterschiedliche) Matrizen über einem Körper K. Man kann zeigen, daß dann folgende Regel für die Blockmultiplikation von hieraus aufgebauten Matrizen in Blockgestalt gilt, wenn die Blockformate zu sinnvollen Objekten links und rechts des Gleichheitszeichens führen:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) \quad = \quad \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array}\right)$$

Beispielsweise müssen A und B die gleiche Zeilenanzahl, A und C die gleiche Spaltenanzahl haben, und die Spaltenanzahl von A muß der Zeilenanzahl von A' entsprechen.

Dies alles müssen Sie nicht zeigen. Überlegen Sie sich allenfalls die Zusammenhänge an folgendem einfachen Beispiel: Ist $A \in K^{n\times n}$, $B \in K^{m\times m}$, $C \in K^{n\times m}$ sowie $E_n \in K^{n\times n}$, $E_m \in K^{m\times m}$ Einheitsmatrizen, so gilt:

$$\left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & E_m \end{array}\right) \quad = \quad \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

a) Zeigen Sie für obige Matrix in Blockgestalt:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & C\,. \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \quad = \quad \det(A) \cdot \det(B)$$

b) Sei $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ und U ein φ-invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie

$$\det(\varphi) \quad = \quad \det(\varphi|_U) \cdot \det(\varphi|_{V/U})\,.$$