Dr. B. Mühlherr / Dr. G. Skoruppa SS 2002

4. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 15.05.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

Wenn nichts anderes vereinbart ist, wird mit K ein Körper bezeichnet.

Aufgabe 13:

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbf{R}^3$ an, bezüglich der die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ des Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^3)$ mit $\varphi(v) := Av$ für $v \in \mathbf{R}^3$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 14:
Sei V ein K-Vektorraum. Dann heißt $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ *irreduzibel*, falls $\{0\}$ und V die einzigen φ-invarianten Unterräume von V sind.

a) Sei $\dim(V) < \infty$. Man zeige: Ist $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ irreduzibel und $\psi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, so ist ψ invertierbar oder gleich der Nullabbildung.

Information: Man weiß (vgl. Vorlesung), daß

$$Z(\varphi) := \{\psi \in \mathrm{End}(V) \mid \varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi\}$$

ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Teilring von $\mathrm{End}(V)$ ist. Mit der in a) zu zeigenden Aussage folgt nun, daß $Z(\varphi)$ im Falle der Irreduzibilität von φ ein Schiefkörper ist.

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie, daß $\varphi_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, v \mapsto Av$ irreduzibel ist und bestimmen Sie $Z(A) := \{X \in \mathbf{R}^{2\times 2} \mid XA = AX\}$. Zu welcher Struktur ist $Z(A)$ isomorph?

c) Es sei $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in {\mathbf{F}_2}^{2\times 2}$. Zeigen Sie, daß $\varphi_C : {\mathbf{F}_2}^2 \to {\mathbf{F}_2}^2, v \mapsto Cv$ irreduzibel ist und bestimmen Sie $Z(C) := \{X \in {\mathbf{F}_2}^{2\times 2} \mid XC = CX\}$. Für $Z(C)$ gebe man die Verknüpfungstafel für die Addition und Multiplikation an.

Aufgabe 15:
Es seien V ein K-Vektorraum, $U_1, \ldots, U_k$ Unterräume von V und

$$U \quad := \quad \sum_{i=1}^{n} U_i = \{u_1 + \cdots + u_k \mid u_i \in U_i, i = 1, \ldots, k\}.$$

Für $i = 1, \ldots, k$ sei d_i die Dimension von U_i und $\mathcal{B}_i := (b_{i,1} \ldots, b_{i,d_i})$ eine Basis von U_i. Zeigen Sie, daß die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

a) $\forall u_1 \in U_1, \ldots, u_k \in U_k : \qquad \left(\sum_{i=1}^{k} u_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, k : u_i = 0 \right).$

b) $(b_{1,1}, \ldots, b_{1,d_1}, b_{2,1}, \ldots, b_{2,d_2}, \ldots, b_{k,1}, \ldots, b_{k,d_k})$ ist eine Basis von U.

c) $\dim U = \sum_{i=1}^{k} d_i$.

Aufgabe 16:
Sei $A \in \mathbf{R}^{5\times 5}$mit $A^{10} = 0$. Zeigen Sie, daß dann auch $A^5 = 0$ gilt.

Präsenzaufgaben für den 13.5.2002

Aufgabe P1:
Sei V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und $U \leq_\varphi V, W \leq_\varphi V$. Dann ist $U \cap W \leq_\varphi V$ und $U + W \leq_\varphi V$.

Aufgabe P2:
Man nennt zwei Matrizen A und B aus $K^{n\times n}$ *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$ gibt mit $B = SAS^{-1}$.

a) Zeigen Sie: Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$.

b) Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und sind $A := M_\mathcal{A}(\varphi)$ und $B := M_\mathcal{B}(\varphi)$ Darstellungsmatrizen von φ bzgl. zweier Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, so zeige man, daß es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$ mit $B = SAS^{-1}$ gibt. Damit sind A und B also ähnlich.