5. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 22.05.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

Wenn nichts anderes vereinbart ist, wird mit K ein Körper bezeichnet.

Aufgabe 17:
Seien $a, b, d \in \mathbf{R}$ und $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$. Man definiere dann $\varphi_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ durch $\varphi_A(v) := Av$ für $v \in \mathbf{R}^2$ und zeige:

a) φ_A ist diagonalisierbar.

b) Ist $a \neq d$ und $\mathcal{B} = (v, w)$ eine Basis von $\mathbf{R}^2$, so daß $M_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$ Diagonalgestalt hat, so ist $v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$.

Aufgabe 18:
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Man zeige:

Ist $V = U \bigoplus W$ eine φ-invariante Zerlegung von V, so ist $\chi_\varphi = \chi_{\varphi_U}\chi_{\varphi_W}$, wobei $\varphi_U := \varphi|_U$ und $\varphi_W := \varphi|_W$.

Aufgabe 19:
Es seien $k \in \mathbf{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ paarweise verschieden. Man zeige: Dann sind die k Funktionen $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f_i(t) = e^{\lambda_i t}$, $i = 1, \ldots, k$ linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Aufgabe 20:
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $k \in \mathbf{N}$ und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\varphi^k = 0$ Sei $d_i = \dim \mathrm{Kern}\varphi^i$ für $1 \leq i \leq k$ und $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis zu V, so daß $\mathcal{B}_i = (b_1, \ldots, b_{d_i})$ eine Basis zu $\mathrm{Kern}\varphi^i$ ist für alle $1 \leq i \leq k$. Man zeige: Dann hat $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die Form $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

(bitte wenden)

Präsenzaufgaben für den 27.5.2002

Aufgabe P1:
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und U ein Untervektorraum von V. Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) U ist φ-invariant.

b) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}_U = (b_1, \ldots, b_k)$ von U mit $\varphi(b_i) \in U$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Aufgabe P2:
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, U ein Unterraum, $\mathcal{B}_U = (b_1, \ldots, b_k)$ eine Basis von U und $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-k})$ eine Basis von V/U. Für $1 \leq i \leq n-k$ sei $b_{i+k} \in \bar{x}_i$. Man zeige: Dann ist $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V.

Aufgabe P3:
Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich dimensionaler $\mathbf{C}$-Vektorraum und seien $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Man zeige, daß φ und ψ wenigstens einen gemeinsamen Eigenvektor besitzen.