6. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 29.05.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 21:

Sei $K = \mathbf{F}_{11}$ und $A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$.

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimmen Sie die Menge $\{v \in K^3 \mid Av = v\}$.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

d) Sei $\varphi_A : K^3 \to K^3$ bezeichnet durch $\varphi_A(v) := Av$ für $v \in K^3$. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von K^3, so daß $M_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 22:

a) Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$ und $U_1, \ldots, U_k$ Untervektorräume von V. Man zeige, daß V genau dann direkte Summe der U_i ist, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \dim U_i = n \qquad \text{und} \qquad U_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} U_j \right) = \{0\} \quad \text{für } i = 2, \ldots, k.$$

b) Man zeige, daß die Behauptung aus a) falsch wird, wenn man die letzte Bedingung ändert in $U_i \cap U_j = \{0\}$ für $i \neq j$.

Aufgabe 23:
Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Jordan-Matrix. Man zeige:

a) $\lambda \in K$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn in A ein Jordan-Block $J_q(\lambda)$ vorkommt.

b) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A und μ_{ij} für $i \in \mathbf{N}$ und $1 \leq j \leq k$ die Anzahl der $J_i(\lambda_j)$-Blöcke, so gilt:

$$\mu_{ij} \quad = \quad \mathrm{Rang}(A_j^{i-1}) - 2\mathrm{Rang}(A_j^{i}) + \mathrm{Rang}(A_j^{i+1})\,,$$

wobei $A_j := A - \lambda_j E_n$ gilt.

Aufgabe 24:

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von $A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.