7. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 5.06.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 25:
Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar. Man zeige:

a) Ist $Z(\varphi) = \{p(\varphi) \mid p \in K[t]\}$, so hat φ n verschiedene Eigenwerte.

b)* Es gilt auch die Umkehrung von a).

Aufgabe 26:
Sei $V := K^{n\times n}$. Zeigen Sie für $b : V \times V \to K$ mit $b(A,B) := \mathrm{spur}(A^\top B)$ für $A, B \in K^{n\times n}$:

a) b ist eine symmetrische Bilinearform auf $K^{n\times n}$, das sog. *Killingprodukt* zweier Matrizen A und B aus $K^{n\times n}$.

b) Berechnen Sie für $V = K^{2\times 2}$ das orthogonale Komplement $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}^\perp$.

c) Geben sie eine Orthogonalbasis für $V = K^{2\times 2}$ an.

Aufgabe 27:
Sei V ein K-Vektorraum und $b : V \times V \to K$ eine reflexive Bilinearform.

a) Zeigen Sie für $u, v, w \in V$: $b(u,w)b(v,u) = b(u,v)b(w,u)$.

b) Verifizieren Sie für $\dim(V) = 2$ den Satz aus der Vorlesung, wonach b als reflexive Bilinearform entweder symmetrisch oder antisymmetrisch (=alternierend) ist.
Anleitung: Man setze in a) $u = w$.

Aufgabe 28:
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $b : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete reflexive Bilinearform. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Nach Vorlesung ist die zu φ adjungierte Abbildung $\varphi^{\mathrm{ad}} \in \mathrm{End}(V)$ definiert durch

$$b(v, \varphi^{\mathrm{ad}}(w)) \;=\; b(\varphi(v), w) \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

a) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}(\varphi^{\mathrm{ad}})$ mittels der Matrizen $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $M_{\mathcal{B}}(b)$.

b) Zeigen Sie: Ist U φ-invarianter Unterraum von V, so ist $U^\perp$ φ^{ad}-invariant.

Präsenzaufgabe P1:
Es sei $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^6)$ mit $\chi_\varphi(t) = (t-2)^2(t-4)^4$. Wie kann die Jordan-Normalform von φ aussehen?