Dr. B. Mühlherr / Dr. G. Skoruppa SS 2002

8. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 12.06.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

ACHTUNG: NEUFASSUNG VOM 13.6.02

Aufgabe 29:

a) Es sei $q : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}$ die quadratische Form mit

$$q(x_1, \dots, x_5) \quad := \quad 2{x_2}^2 + {x_3}^2 + 2{x_4}^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - x_4x_5.$$

Berechnen Sie durch Angabe einer Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{E}}(b)$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{E}$ die zugehörige symmetrische Bilinearform b und bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von V (bezüglich b). Ist $(\mathbf{R}^5, b)$ ein euklidischer Vektorraum?

b)* Suchen Sie einen endlich dimensionalen K-Vektorraum V und eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ mit $b(v, w) = b(w, v)$ für alle $v, w \in V$, so daß V bezüglich b keine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ mit $b(v_i, v_j) = 0$ für $1 \leq i \neq j \leq n$ besitzt.
Tip: Die Generalvoraussetzung des Vorlesungsabschnitts über symmetrische Bilinearformen schränkt die Suche stark ein.

Aufgabe 30:

Weisen Sie für k Vektoren $v_1, \dots, v_k$ eines euklidischen oder unitären Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ nach:

$$\|v_1 + \dots + v_k\| \quad \leq \quad \|v_1\| + \dots + \|v_k\|$$

und Gleichheit genau falls es ein $v \in V$ und nicht negative Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit $v_i = \lambda_i v$, $i = 1, \dots, k$ gibt.

Aufgabe 31:

a) Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $b : V \times V \to K$ eine Bilinearform auf V. Sei $D : V^n \to K$ eine Volumenfunktion auf V. Zeigen Sie: Es gibt eine Zahl $\gamma \in K$, so daß für alle $v_1, \dots, v_n \in V$ gilt:

$$\begin{vmatrix} b(v_1, v_1) & \dots & b(v_1, v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(v_n, v_1) & \dots & b(v_n, v_n) \end{vmatrix} \quad = \quad \gamma \cdot (D(v_1, \dots, v_n))^2$$

b) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Man zeige, daß es eine sogenannte *normierte Volumenfunktion* $D_0 : V^n \to \mathbf{R}$ mit

$$\sqrt{\begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{vmatrix}} \quad = \quad |D_0(v_1, \dots, v_n)|$$

gibt. Ist D_0 eindeutig bestimmt?

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ zusammen mit einer normierten Volumenfunktion $D_0 : V^n \to \mathbf{R}$ nennt man *orientiert*. Basen $(v_1, \dots, v_n)$ von V mit $D_0(v_1, \dots, v_n) > 0$ nennt man *positiv orientiert*.

c) Zeigen Sie für einen dreidimensionalen orientierten euklidischen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle, D_0)$: Zu jedem Paar $u, v \in V$ existiert genau ein Vektor $b \in V$ mit

$$D_0(u, v, w) \quad = \quad \langle b, w \rangle \qquad \text{für alle } w \in V$$

Symbolisch schreibt man $u \times v := b$ (*Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* von u und v).

d) Zeigen Sie in der Situation von c):

i) $u \times v \perp u, v$.

ii) $u \times v = -(v \times u)$.

iii) $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ linear abhängig.

iv) Sind u, v linear unabhängig, so ist $(u, v, u \times v)$ eine positiv orientierte Basis für V.

v) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$.

vi) Bestimmen Sie bzgl. einer positiv orientierten ONB (b_1, b_2, b_3) die Koeffizienten von $u \times v$ in Abhängigkeit der Koeffizienten von u, v.

Aufgabe 32:
Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.

a) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis für $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ (also V endlich dimensional), so zeige man:

$$v \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i\,.$$

Die $\langle v, v_i \rangle$ heißen *Fourierkoeffizienten* von v bzgl. der vorgegebenen Basis.

b) Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ Orthonormalbasis eines Untervektorraums W von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ und $v \in V$. Zeigen Sie, daß für alle $w \in W$ und den Vektor $w_0 := \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i \rangle v_i$ aus W gilt:

$$\|v - w\| \quad \geq \quad \|v - w_0\|\,.$$

c) Folgern Sie aus b) die *Besselsche Ungleichung*: Ist $(v_1, \ldots, v_k)$ ein Orthonormalsystem (nicht notwendig eine komplette Basis!) für $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so gilt für $v \in V$

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle v, v_i \rangle|^2 \quad \leq \quad \|v\|^2\,.$$

Was folgt hieraus für die Fourierkoeffizientenfolge eines unendlichen Orthonormalsystems $(v_i)_{i \in \mathbf{N}}$?

Präsenzaufgabe P1:
Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 26, daß für zwei symmetrische Matrizen $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ die Ungleichung $\mathrm{spur}(AB)^2 \leq \mathrm{spur}(A^2)\mathrm{spur}(B^2)$ gilt.

Präsenzaufgabe P2:
Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum mit endlicher Dimension und $\mathcal{B}$ eine ONB für $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

$$\varphi \text{ ist } \left\{ \begin{array}{l} \text{selbstadjungiert} \\ \text{orthogonal} \\ \text{unitär} \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathcal{B}}(\varphi) \text{ ist } \left\{ \begin{array}{l} \text{symmetrisch bzw. hermitesch} \\ \text{orthogonal} \\ \text{unitär} \end{array} \right\}.$$