9. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 19.06.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

ACHTUNG: NEUFASSUNG VOM 24.6.02

Aufgabe 33:
Bezüglich der Standardbasis des $\mathbf{R}^3$ seien zwei quadratische Formen p, q auf $\mathbf{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, x_3) &:= {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 6{x_3}^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 \\ q(x_1, x_2, x_3) &:= 5{x_1}^2 + 12{x_2}^2 + 35{x_3}^2 - 18x_1x_2 + 28x_1x_3 - 42x_2x_3 \,. \end{aligned}$$

Man verifiziere, daß p positiv definit ist und bestimme eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbf{R}^3$, die p und q simultan diagonalisiert.

Aufgabe 34:
Sei $A \in K^{n\times n}$ symmetrisch oder hermitesch (also $K = \mathbf{R}$ oder $K = \mathbf{C}$). Gelte $\det A_i \neq 0$ für alle Hauptminoren A_i von A ($i = 1, \dots, n$). Man zeige:

a) Es gibt Zahlen $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{1, -1\}$ und eine obere Dreiecksmatrix $T \in K^{n\times n}$, so daß

$$A = T^\top \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \epsilon_n \end{pmatrix} \overline{T}.$$

b) Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\begin{aligned} \det(A_i) > 0 &\Leftrightarrow \epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_i = 1\,, \\ \det(A_i) < 0 &\Leftrightarrow \epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_i = -1\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 35:
Sei $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

a) Ist φ idempotent (d.h. $\varphi^2 = \varphi$), so gilt $V = \mathrm{Kern}\varphi \oplus \mathrm{Bild}\varphi$.

b) φ idempotent $\Leftrightarrow id - \varphi$ idempotent.

Gilt eine der Aussagen, so folgt $\mathrm{Kern}(id - \varphi) = \mathrm{Bild}\varphi$ und $\mathrm{Bild}(id - \varphi) = \mathrm{Kern}\varphi$.

c) Sei φ idempotent. Dann gilt: φ selbstadjungiert $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}\varphi \perp \mathrm{Bild}\varphi$.

Aufgabe 36:
Man zeige, daß jeder bijektive Endomorphismus φ eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes $(V, \langle\,,\,\rangle)$ auf genau eine Weise in der Form $\varphi = \psi\theta$ mit selbstadjungiertem und positiv definitem $\psi \in \mathrm{End}(V)$ und orthogonalem $\theta \in \mathrm{End}(V)$ geschrieben

werden kann (*polare Zerlegung*).
Tip: Man benutze die Aussage von Präsenzaufgabe P2.

Präsenzaufgabe P1:
Für einen selbstadjungierten und positiv definiten Endomorphismus φ eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ beweise man:

$$\frac{1}{n}\mathrm{spur}(\varphi) \quad \geq \quad \sqrt[n]{\det(\varphi)}$$

mit Gleichheit genau falls φ ein Vielfaches der Identität ist.

Präsenzaufgabe P2:
Man weise nach: Für einen selbstadjungierten und positiv semidefiniten Endomorphismus φ eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ und eine Zahl $k \in \mathbf{N}$ gibt es stets genau einen selbstadjungierten und positiv semidefiniten Endomorphismus ψ von V mit $\psi^k = \varphi$ (*k-te Wurzel* von φ).