10. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 26.06.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 37:

a) Bestimmen Sie eine Lösungsnäherung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie a) graphisch!

Aufgabe 38:
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{4\times 3} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$$

a) Bestimmen Sie eine Vollrangfaktorisierung von A.

b) Berechnen Sie die Moore-Penrose-Inverse von A.

c) Bestimmen Sie die Lösungsnäherung des Gleichungssystems $Ax = b$

Aufgabe 39:
Bestimmen Sie die Moore-Penrose-Inversen A^-und B^- von

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{n\times n}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 40:
Definition: Sei K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum.

Für $X, Y \leq V$ mit $V = X \bigoplus Y$ bezeichnet $P_X^Y : V \to V$ die Projektion von V auf X längs Y. Die Abbildung $\pi_{V,X}^Y : V \to X$ ist definiert durch $\pi_{V,X}^Y(v) := P_X^Y(v)$ für alle $v \in V$ (die sogenannte *Nachbeschränkung* von P_X^Y auf das Bild X).

Ist $U \leq V$, so bezeichnet man mit $\epsilon_{U,V} : U \to V$ die *Inklusionsabbildung von U in V*, die definiert ist durch $\epsilon_{U,V}(u) := u$ für alle $u \in U$.

Aufgabenstellung: Sei $\varphi : V \to W$ linear, $X_0 :=$ Kernφ, $Y_1 :=$ Bildφ, X_1 ein Komplement zu X_0 in V und Y_0 ein Komplement zu Y_1 in W. Sei φ_1 der von φ induzierte Isomorphismus von X_1 auf Y_1 und $\varphi^- := \epsilon_{X_1,V} \circ {\varphi_1}^{-1} \circ \pi_{W,Y_1}^{Y_0}$.

a) Man zeige

$$\begin{aligned}
\epsilon_{X_1,V} \circ \pi_{V,X_1}^{X_0} &= P_{X_1}^{X_0}, \\
\pi_{V,X_1}^{X_0} \circ \epsilon_{X_1,V} &= id_{X_1}, \\
\epsilon_{Y_1,W} \circ \varphi_1 \circ \pi_{V,X_1}^{X_0} &= \varphi, \\
\varphi \circ \varphi^- \circ \varphi &= \varphi, \\
\varphi^- \circ \varphi \circ \varphi^- &= \varphi^-.
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: Ist $\tilde{\varphi} : W \to V$, so daß $\varphi \circ \tilde{\varphi} \circ \varphi = \varphi$ und $\tilde{\varphi} \circ \varphi \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$, so ist $\tilde{Y}_0 :=$ Kern$\tilde{\varphi}$ ein Komplement zu Y_1, $\tilde{X}_1 :=$ Bild$\tilde{\varphi}$ ein Komplement zu X_0 und es gilt

$$\epsilon_{\tilde{X}_1,V} \circ \tilde{\varphi}_1^{-1} \circ \pi_{W_1,Y_1}^{\tilde{Y}_0} = \tilde{\varphi},$$

wobei $\tilde{\varphi}_1$ der von φ induzierte Isomorphismus von $\tilde{X}_1$ auf Y_1 ist.

Klausurankündigung: Die Klausur zum Erwerb eines Leistungsnachweises zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ findet am

Samstag, 20. Juli 2002, 13:30 Uhr - 16:30 Uhr in HS 1, HG II

statt. Für die Teilnahme ist eine **Anmeldung** in den Übungsgruppen bis zum 8.7.2002 erforderlich. Eine Zulassung erhält nur, wer in den Übungen eine angemessene Beteiligung gezeigt hat. Hinreichend hierfür ist die Erreichung von 40% der Gesamtpunktzahl in den schriftlichen Übungsaufgaben. Hilfsmittel wie z.B. Skripten, Bücher, Taschenrechner sind nicht zugelassen. Bitte finden Sie sich ca. 10 min. vor Beginn **vor** dem Hörsaal ein. Bitte an Lichtbildausweis und Studentenausweis denken!