Dr. B. Mühlherr / Dr. G. Skoruppa SS 2002

11. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 3.7.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 41:
Man zeige, daß die Matrix

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

orthogonal ist und ermittle die Normalfom der zugehörigen Isometrie φ.
Hinweis: Man betrachte $\varphi + \varphi^*$.

Aufgabe 42:
Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle, D_0)$ ein 3-dimensionaler orientierter euklidischer Vektorraum (vgl. Aufgabe 31). Sei $\theta \in \mathbf{R}$, $a \in V$ mit $\|a\| = 1$ und (v_1, v_2, v_3) eine positiv orientierte ONB von $(V, \langle\ ,\ \rangle, D_0)$. Zeigen Sie, daß die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &:= \cos\theta \cdot u + \langle v_3, u\rangle \cdot (1 - \cos\theta) \cdot v_3 + \sin\theta \cdot v_3 \times u, \\ \varphi_2(u) &:= u + \sin\theta \cdot a \times u + (1 - \cos\theta) \cdot a \times (a \times u) \end{aligned}$$

Drehungen in V sind. Beschreiben Sie diese durch Angabe ihrer Normalformen (und der zugehörigen ON-Basen).

Aufgabe 43:
Zeigen Sie: Jede Drehung in $\mathbf{R}^3$ (mit Standardskalarprodukt) kann als Hintereinanderausführung dreier Drehungen um die drei Standardkoordinatenachsen beschrieben werden.

Aufgabe 44:
Sei K ein Körper, $n \in \mathbf{N}$ und $d_H : K^n \times K^n \to \mathbf{R}$ die Hamming-Metrik auf K^n. Man zeige:

a) $H(n, K) = (K^n, d_H)$ ist ein metrischer Raum.

b) Ist $p \in K^n$, so ist die Abbildung $\tau_p : K^n \to K^n$ mit $\tau_p(v) := v+p$ eine Isometrie von $H(n, K)$.

c) Ist $\pi \in S_n$, so ist die Abbildung $\varphi_\pi : K^n \to K^n$ mit

$$\varphi_\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}$$

eine Isometrie von $H(n, K)$.

(bitte wenden!)

Ab jetzt gelte $K = \mathbf{F}_2$.

d) Ist $\alpha \in \mathrm{Isom}(H(n, K))$ mit $\alpha(0) = 0$, so gibt es ein $\pi \in S_n$ mit $\alpha = \varphi_\pi$.

e) Jedes $\alpha \in \mathrm{Isom}(H(n, K))$ läßt sich eindeutig schreiben als $\alpha = \tau_p \circ \varphi_\pi$ mit $p \in K^n$ und $\pi \in S_n$.

f)* $\mathrm{Aut}(H(2, K))$ ist isomorph zur Spiegelungsgruppe des Quadrats. Welche entsprechende Aussage läßt sich über $\mathrm{Aut}(H(3, K))$ machen?

Präsenzaufgabe P1:
Liegt ein Fußball zu Beginn der ersten und zweiten Halbzeit exakt auf dem Anstoßpunkt, so gibt es zwei Punkte auf der Balloberfläche, die sich zu Beginn der ersten und zweiten Halbzeit exakt am gleichen Ort im umgebenden Raum befinden.