12. Übungsblatt
Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Abgabe: bis zum 10.7.02, 14:00 Uhr in den Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 45:
Sei R ein Integritätsbereich. Man zeige:

i) $\forall a, b, c \in R: \quad a|b$ und $b|c \Rightarrow a|c$,

ii) $\forall a, b, c \in R: \quad a|b$ und $a|c \Rightarrow a|(b \pm c)$,

iii) $\forall a, b \in R: \quad a|b \Leftrightarrow (b) \subseteq (a)$,

iv) $\forall a \in R: \quad a|0, 1|a$ und $a|a$,

v) $\forall a, b \in R: \quad (a|b$ und $b|a \Rightarrow \exists \varepsilon \in R^* : a = \varepsilon b)$.

Aufgabe 46:
Man zeige:

a) Ist K ein Körper und $I \subseteq K$ ein Ideal von K, so ist $I = \{0\}$ oder $I = K$.

b) Sei K ein Körper, M eine Menge und R der Ring $\mathrm{Abb}(M, K)$ mit der punktweisen Addition und Multiplikation (vgl. Vorlesung). Ist I ein Ideal in R, so gibt es ein $X \subseteq M$ mit $I = \{f \in \mathrm{Abb}(M, K) \mid \forall x \in X : f(x) = 0\}$.

c)* Sei K ein Körper und $n \in \mathbf{N}$. Ist I ein Ideal in $R := K^{n \times n}$, so ist $I = \{0\}$ oder $I = R$.

Aufgabe 47:
Ein Integritätsring R heißt *euklidischer Ring*, wenn $\delta : R \backslash \{0\} \to \mathbf{N}_0$ mit der Eigenschaft

$$\forall a, b \in R \quad \exists q, r \in R \quad a = qb + r \text{ wobei entweder } r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$$

existiert. Man zeige: Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.

(bitte wenden!)

Aufgabe 48:
Sei $R := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathbf{C}$. Man zeige:

a) R ist ein Teilring von $\mathbf{C}$.

b) $\omega : R \to \mathbf{Z}$ definiert durch $\omega(a + b\sqrt{-5}) := (a + b\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5})$ hat die Eigenschaft $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$ für alle $x, y \in R$.

c) Ist $\varepsilon \in R^*$, so ist $\omega(\varepsilon) \in \{-1, 1\}$. Insbesondere ist $R^* = \{-1, 1\}$.

d) Seien $x, y \in R$ mit $x|y$. Dann gilt $\omega(x)|\omega(y)$.

e) 2 ist irreduzibel in R und $2|(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$, aber 2 teilt weder $1 + \sqrt{-5}$ noch $1 - \sqrt{-5}$.

Präsenzaufgabe P1:
Sei K ein Körper und $K[x, y]$ der Polynomring in 2 Variablen über K. Sei I die Menge aller Polynome in $K[x, y]$, deren konstanter Term 0 ist. Dann ist I ein Ideal, das kein Hauptideal ist.