Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

# 3. Übungsblatt zu „Analysis I für Lehramt“, WS 2002/03

Abgabetermin: Donnerstag, 7.11.02, bis 12.00 Uhr in den Kästen

**Aufgabe 11:** Zeigen Sie mit Hilfe der Funktionalgleichungen für Sinus und Kosinus die folgenden Formeln für alle $s \in \mathbb{R}$.

**a)** $\sin(2s) = 2\sin s\,\cos s$ **b)** $\cos(2s) = \cos^2 s - \sin^2 s$

Leiten Sie Formeln für $\sin(3s)$ und $\cos(3s)$ her.

**Aufgabe 12: a)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $f(f^{-1}(M))$ und $f^{-1}(f(M))$ für $M := (-\infty, 0]$.
**b)** Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$f(A \cap B) \ \subseteq\ f(A) \cap f(B)$$

Gilt auch die umgekehrte Inklusion?

**Aufgabe 13:** Zeigen Sie, daß die angegebenen Folgen beschränkt sind.

**a)** $\left(\dfrac{2}{3+n^2}\right)$ **b)** $(4\cos n - 3\sin n^2)$ **c)** $\left(\dfrac{3n\sin(5n)}{2^n}\right)$ **d)** $\left(\dfrac{n^2}{4^n}\right)$

**Aufgabe 14:** Es seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ zwei Abbildung und $h := g \circ f$ deren Komposition. Zeigen Sie, daß gilt:

**a)** $f$, $g$ injektiv $\Rightarrow$ $h$ injektiv

**b)** $f$, $g$ surjektiv $\Rightarrow$ $h$ surjektiv

**c)** $f$, $g$ bijektiv $\Rightarrow$ $h$ bijektiv

**d)** $h$ bijektiv $\Rightarrow$ $f$ injektiv und $g$ surjektiv

Überlegen Sie sich jeweils Gegenbeispiele für die umgekehrten Inklusionen.

**Aufgabe 15:** Geben Sie für die folgende Mengen $M$ jeweils eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ an.

**a)** $M := \mathbb{Z}$ **b)** $M := p\mathbb{Z} := \{pz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ für $p \in \mathbb{N}$