Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

5. Übungsblatt zu „Analysis I für Lehramt“, WS 2002/03

Abgabetermin: Donnerstag, 21.11.02, bis 12.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 21: Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

a) $a_n := \dfrac{4n^3 - (-1)^n n^2}{5n + 2n^3}$ **b)** $b_n := \dfrac{n! - 5}{3n^4 + 7^n}$ **c)** $c_n := \dfrac{\cos(3n)}{\sqrt{\sqrt{n}}}$

d) $d_n := \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2 - 1$

Aufgabe 22: Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-2} \sum\limits_{k=1}^{n} k$.

Aufgabe 23: Finden Sie eine unbeschränkte Folge, die weder nach $+\infty$ noch nach $-\infty$ strebt.

Aufgabe 24: Es sei $(a_n) \subseteq \mathbb{R}\backslash\{3\}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$. Existiert dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 - 9}{a_n - 3} \; ?$$

Aufgabe 25: Ein Mensch nimmt täglich 5 mg eines Langzeit-Medikaments zu sich. Im Körper werden pro Tag 40 % des Medikaments abgebaut. Es soll geklärt werden, welche Menge des Medikaments sich nach langer Zeit im Körper befindet.

a) Es bezeichne a_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge des Medikaments (in mg), die sich nach n Tagen im Körper befindet. Es ist also $a_0 = 5$. Finden Sie eine Rekursionsformel für die a_n mit $n \in \mathbb{N}$.

b) Allgemein sei nun zu $0 < s$ und $0 < t < 1$ die Folge (a_n) rekursiv definiert durch $a_0 := s$ und

$$a_n \; := \; t\, a_{n-1} + s \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \, .$$

Zeigen Sie, daß (a_n) durch $C := \frac{s}{1-t}$ nach oben beschränkt und monoton wachsend ist.

c) Zeigen Sie, daß (a_n) konvergiert, und berechnen Sie $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
(Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$).

d) Finden Sie eine explizite Formel für die Folgeglieder a_n mit $n \in \mathbb{N}$.