Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

12. Übungsblatt zu „Analysis I für Lehramt“, WS 2002/03

Abgabetermin: Donnerstag, 23.1.03, bis 12.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 56: Entscheiden Sie, ob folgende Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls $\sup M$ und $\inf M$. Stellen Sie weiter fest, ob M ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

a) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 10\}$ **b)** $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 27\}$

c) $M = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ **d)** $M = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 57: Es sei (a_n) eine beschränkte monoton wachsende Folge. Zeigen Sie, daß $\sup\{a_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt, und geben Sie damit einen direkten Beweis für die Implikation $(S) \Rightarrow (M)$ in Satz 16.7.

Aufgabe 58: Definiere $M + N := \{x + y \in \mathbb{R} \mid x \in M,\ y \in N\}$ für Mengen $M, N \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß für beschränkte Mengen M, N

$$\sup(M+N) \ = \ \sup M + \sup N \qquad \text{und} \qquad \inf(M+N) \ = \ \inf M + \inf N$$

gilt.

Aufgabe 59: Die Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ seien nach oben beschränkt. Zeigen Sie, daß auch $f + g$ nach oben beschränkt ist und daß

$$\sup(f+g)(M) \ \leq \ \sup f(M) + \sup g(M)$$

gilt. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem „$<$“ auftritt.

Aufgabe 60: Es seien p_n, q_n und π_n wie in Abschnitt 17 der Vorlesung definiert. Zeigen Sie die Formel $\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi_n} + \frac{1}{q_n}\right)$; es ist also q_{n+1} das *harmonische Mittel* von $\pi_n = p_{n+1}$ und q_n.