Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

13. Übungsblatt zu „Analysis I für Lehramt“, WS 2002/03

Abgabetermin: Donnerstag, 30.1.03, bis 12.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 61: Es sei $f \in \mathcal{C}([a,b])$ monoton wachsend und Z eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$S(f,Z) - s(f,Z) \;\le\; (f(b) - f(a)) \cdot \Delta(Z)$$

Versuchen Sie, für diese Situation den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu beweisen.

Aufgabe 62: Es seien P_n, Q_n, p_n und q_n wie in Abschnitt 17 der Vorlesung definiert.

a) Die Ecken von P_n in der oberen Halbebene sind gegeben durch die Menge

$$A_n \;:=\; \left\{ \left(\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right), \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right) \right) \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots, 3 \cdot 2^n \right\} .$$

Werden diese Ecken durch Strecken verbunden, so ergeben sich *stückweise affine* Funktionen $a_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_{-1}^{1} a_n(x)\,dx \;=\; \frac{1}{2} \cdot p_n$$

b) Die Ecken von Q_n in der oberen Halbebene sind gegeben durch die Menge

$$B_n \;:=\; \left\{ \frac{1}{h_n} \cdot \left(\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right), \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right) \right) \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots, 3 \cdot 2^n \right\} .$$

Werden diese Ecken durch Strecken verbunden, so ergeben sich stückweise affine Funktionen $b_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_{-1}^{1} b_n(x)\,dx \;=\; \frac{1}{2} \cdot q_n$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Teile a) und b), daß gilt:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 63: Berechnen Sie den Mittelwert μ der Funktion $f : x \mapsto x(1-x)$ über dem Intervall $[0,1]$. Für welche $\xi \in [0,1]$ gilt $\mu = f(\xi)$?

Aufgabe 64: Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen über geeigneten Intervallen.

a) $x \mapsto \sqrt{3x+5}$ **b)** $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ **c)** $x \mapsto x^2 \cos x$

Aufgabe 65: Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{x}{1 + \sin^2 t}\,dt$ **b)** $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^3} \frac{x}{1 + \sin^2 t}\,dt$