Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

15. Übungsblatt zu „Analysis I für Lehramt“, WS 2002/03

Abgabetermin: Keine Abgabe!

Aufgabe 71: Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\int_{1\downarrow}^{2} \frac{dx}{\log x}$ **b)** $\displaystyle\int_{1}^{\uparrow\infty} \sin^2 \frac{1}{x}\, dx$ **c)** $\displaystyle\int_{0}^{\uparrow\infty} \sin(x^2)\, dx$ **d)** $\displaystyle\int_{0}^{\uparrow\infty} x^2 e^{-x}\, dx$

Aufgabe 72: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ **b)** $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log x$ **c)** $h : [1,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log x$

Aufgabe 73: a) Finden Sie Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+1} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

b) Berechnen Sie

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 1}{x(x^2+1)^2}\, dx\,.$$

Aufgabe 74: a) Zeigen Sie, daß für $t := \tan\frac{x}{2}$ gilt:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Substitution aus Teil a) das Integral

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx\,.$$

Aufgabe 75: Definiere durch

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die Funktionen *Sinus hyperbolicus* und *Kosinus hyperbolicus.*

- **a)** Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- **b)** Berechnen Sie die Ableitungen von $\sinh x$ und $\cosh x$.
- **c)** Zeigen Sie, daß $\sinh x$ eine Umkehrfunktion besitzt, und berechnen Sie deren Ableitung.
- **d)** Berechnen Sie die *Bogenlänge* des Parabelbogens $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ auf dem Intervall $[0,1]$, d.h. berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

Hinweis: Substituieren Sie $x := \sinh t$.