Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

3. Übungsblatt zu „Analysis III für Sek II“, WS 2002/03

Abgabetermin: Montag, 11.11.02, bis 12.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 11: Untersuchen Sie mit Hilfe des Theorems aus Abschnitt 4 die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ auf Kompaktheit.

a) $M_1 := \mathbb{Z}$ **b)** $M_2 := \mathbb{R}$ **c)** $M_3 := [0, 1)$

Aufgabe 12: Es sei X ein metrischer Raum, so daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein präkompaktes ε-Netz in X gibt. Zeigen Sie, daß X präkompakt ist.

Aufgabe 13: Geben Sie einen einfachen Beweis des Theorems aus Abschnitt 4 für kompakte Intervalle $[a, b]$ an, indem Sie für eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von $[a, b]$ zeigen, daß

$$b = \max\{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ wird von endlich vielen Mengen aus } \mathcal{U} \text{ überdeckt}\}$$

ist.

Aufgabe 14: Beweisen Sie die folgenden (bereits bekannten) Aussagen mit Hilfe des Theorems aus Abschnitt 4.

a) Es seien X, Y metrische Räume. Das Produkt $X \times Y$ ist genau dann kompakt, wenn X und Y kompakt sind.

b) Es seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X kompakt, so auch $f(X) \subseteq Y$.

Aufgabe 15: Zeigen Sie, daß $M := \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge ist.